

第六章 计数原理

6.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

刷基础

1. B 【解析】从这三个盒子中任意取出1张卡牌可分为三类:①取到白色卡牌,有3种取法;②取到黑色卡牌,有2种取法;③取到绿色卡牌,有2种取法.综上所述,由分类加法计数原理可得不同的取法有 $3+2+2=7$ 种,故选B.

2. B 【解析】由分类加法计数原理可知,小张周日去该电影院想看的电影共有 $(5-2)+(4-1)+(6-3)=3+3+3=9$ 部.故选B.

3. D 【解析】由题意知,每名同学都有3种选择,所以根据分步乘法计数原理得,不同的报名方法有 $3\times 3\times 3\times 3=81$ 种.故选D.

名师点拨 本题的核心是人选球队,几个人就是几步,再确定每步有多少种不同的选择方法.(1)不要认为是球队选人,求出方案为 4^3 种;(2)也不要认为每个人选不同的球队,题中没有明确给出这个限制.

4. D 【解析】根据分步乘法计数原理可得,不同的搭档组合种数为 $15\times 12=180$.故选D.

归纳总结 利用分步乘法计数原理解决问题时要注意按事件发生的过程来合理分步,并且分步必须满足完成一件事的各个步骤是相互依存的,只有各个步骤都完成了,才算完成这件事.

5. C 【解析】第一步,第一个小寿星选礼物,有3种方法;
第二步,这个被拿走礼物的小寿星选礼物,有3种方法;
第三步,余下两个小寿星选礼物,只有1种方法.

→ **避坑:** 不能拿自己准备的礼物,只有1种方法

根据分步乘法计数原理可得共有 $3\times 3\times 1=9$ 种拿法.故选C.

6. 480 【解析】先给地区Ⅰ着色,有6种选择,再给地区Ⅱ着色,有5种选择,然后给地区Ⅲ着色,有4种选择,最后给地区Ⅳ着色,也有4种选择,综上所述,满足题意的着色方法共有 $6\times 5\times 4\times 4=480$ 种.

→ **感悟:** 地区Ⅰ与Ⅳ的颜色可以相同

归纳总结 涂色问题的解题规律

(1)对于区域涂色问题,可根据分步乘法计数原理,对各个区域分步涂色,这是处理涂色问题的基本方法,注意不相邻区域颜色是否相同,会影响与它们相邻区域的颜色选择,需要分类讨论.(2)可根据供涂色的颜色种类进行分类讨论,分别计算出各种情形的种数,再用分类加法计数原理求出不同的涂色种数.(3)对几何体顶点涂色问题的解决方法:①可根据共用了多少种颜色分类讨论;②根据相对顶点是否同色分类讨论;③将空间问题平面化,转化成区域涂色问题.(4)对线段涂色问题,要注意对各条线段依次涂色,可以从颜色种数或相对线段是否同色分类讨论.

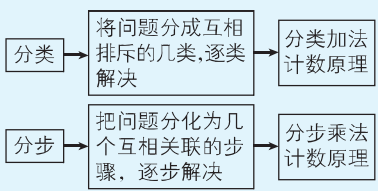
7. C 【解析】由题图知,从A地到B地的道路有2条,从B地到C地的道路有3条,由分步乘法计数原理可知,从A地经过B地到C地不同的路线共有 $2\times 3=6$ 条;

从A地不经过B地到C地的路线有1条.

根据分类加法计数原理可得,从A地到C地不同的路线共有 $6+1=7$ 条.

故选C.

规律方法 使用两个计数原理解题的本质



8. 【解】(1)当个位数为0时,千位数有5种选法,百位数有4种选法,十位数有3种选法,所以能组成 $5\times 4\times 3=60$ 个无重复数字的四位偶数;当个位数不为0时,个位数有2种选法,千位数有4种选法,百位数有4种选法,十位数有3种选法,所以能组成 $2\times 4\times 4\times 3=96$ 个无重复数字的四位偶数.综上所述,共能组成 $60+96=156$ 个无重复数字的四位偶数.

(2)当个位数为0时,万位数有5种选法,千位数有4种选法,百位数有3种选法,十位数有2种选法,所以能组成 $5\times 4\times 3\times 2=120$ 个无重复数字且为5的倍数的五位数;

当个位数为5时,万位数有4种选法,千位数有4种选法,百位数有3种选法,十位数有2种选法,所以能组成 $4\times 4\times 3\times 2=96$ 个无重复数字且为5的倍数的五位数.综上所述,共能组成 $120+96=216$ 个无重复数字且为5的倍数的五位数.

(3)当千位数为1或2时,共能组成 $2\times 5\times 4\times 3=120$ 个无重复数字且不大于3 450的四位数;

当千位数为3,百位数为4,十位数为5时,符合题意的数只有3 450;

当千位数为3,百位数为4,十位数不为5时,十位数有3种选法,个位数有3种选法,所以符合题意的数有 $3\times 3=9$ 个;当千位数为3,百位数不为4时,

→ **避坑:** 百位数不能为5

百位数有3种选法,十位数有4种选法,个位数有3种选法,所以符合题意的数有 $3\times 4\times 3=36$ 个.综上所述,共能组成 $120+1+9+36=166$ 个无重复数字且不大于3 450的四位数.

链接教材 本题是教材第7页练习第5题的同类试题,关于数字的排列问题,需要考虑两种情况,第一种情况,数字可以相同,直接运用分步乘法计数原理解即可;第二种情况,数字不能相同,需要考虑的是,这些数字组成的是几位数还是一个数组,如果仅仅是数组,只需要考虑每个数字所在的位置即可,如果是一个几位数的问题,那就需要考虑提供排列的数字中是否含有0,如果含有0,需要先考虑0的位置,不含有0,可以直接根据条件进行排列.

刷易错

★易错点1 研究对象不清致错

9. 64 【解析】由题知,研究的对象是“3门学科”,只有3门学科各产生1名冠军,才算完成了这件事,而4名同学不一定每人都能获得冠军,故完成这件事分三步.

第一步,产生第1门学科冠军,它一定被其中1名同学获得,故有4种不同的获得情况;

第二步,产生第2门学科冠军,因为夺得第1门学科冠军的同学还可以去争夺第2门学科的冠军,所以第2门学科的冠军也是由4名同学去争夺,有4种不同的获得情况;

第三步,产生第3门学科冠军,同理,也有4种不同的获得情况.

由分步乘法计数原理知,不同的冠军获得情况共有 $4 \times 4 \times 4 = 64$ (种).

易错警示 用分步乘法计数原理求解对象可重复选取的问题时,哪类对象必须“用完”就以哪类对象作为分步的依据. 本题中要完成的“一件事”是“争夺3门学科知识竞赛的冠军,且每门学科只有1名冠军产生”,而如果错解成 $3^4 = 81$ (种)情况,可能出现某一学科冠军被2人,3人甚至4人获得的情形,另外还可能出现某一学科没有冠军产生的情况.

★易错点2 分类标准不清致错

10.20 【解析】 因为 $7+3-9=1$, 所以外语小组9人中有1人既会英语又会日语. 分三类: ①当既会英语又会日语的人当选为会英语的人时,选出只会日语的一人即可,有2种选法; ②当既会英语又会日语的人当选为会日语的人时,选出只会英语的一人即可,有6种选法; ③当既会英语又会日语的人没被选出时,需从只会日语和只会英语的人中各选出一人,有 $2 \times 6 = 12$ (种)选法. 故共有 $2+6+12=20$ (种)选法.

易错警示 本题需要注意隐含条件: 有1人同时会英语和日语,如果直接用 7×3 得到21种情况,那么可能会出现选2人组成活动小组时选中同一人的情况. 用计数原理解题时,注意是否有可能出现重复计数的情况,可以减去重复计数的情况,或者从分类时就避免重复计数.

刷能力

1.B 【解析】 根据题意,对于每只老鼠,都可以被3只猫中的任意一只捉住,故每只老鼠的被捉情况有3种,则共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 种不同的捉法. 故选B.

2.D 【解析】 由题图可知,在最上方左侧2个并联开关中选1个闭合,右侧2个并联开关中选1个闭合,最下方开关闭合,小灯泡发光,有 $2 \times 2 = 4$ 种情况; 在中间左侧2个并联开关中选1个闭合,右侧3个并联开关中选1个闭合,最下方开关闭合,小灯泡发光,有 $2 \times 3 = 6$ 种情况.

因此,闭合最少的开关使小灯泡发光的的不同方法共有 $4+6=10$ 种,故选D.

3.D 【解析】 根据题意,有以下两种情况:

(1)工业区和离心机室颜色相同,则工业区有4种涂法,宿舍区有3种涂法,浮力室有2种涂法,离心机室有1种涂法,黑室有3种涂法,则共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 72$ 种涂法;

(2)工业区和离心机室颜色不同,则工业区有4种涂法,宿舍区有3种涂法,浮力室有2种涂法,离心机室有2种涂法,黑室有2种涂法,则共有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$ 种涂法.

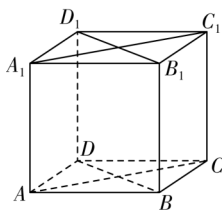
综上,不同的涂色方法共有 $72+96=168$ 种. 故选D.

4.AC 【解析】 对于A,依题意,组成的三位数的个数为 $5 \times 4 \times 3 = 60$,故A正确;对于B,各位数字之和为9的有 $1+3+5, 2+3+4$ 两种,故各位数字之和为9的个数为 $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$,故B错误;对于C,比300大,则百位上的数字可以为3,4,5,则比300大的三位数的个数为 $3 \times 4 \times 3 = 36$,故C正确;对于D,将这些“凹数”分为三类: ①十位为1,则有 $4 \times 3 = 12$ 个; ②十位为2,则有 $3 \times 2 = 6$ 个; ③十位为3,则有 $2 \times 1 = 2$ 个,所

点悟: 从最小的十位上的数字入手分类讨论

以在组成的三位数中,“凹数”的个数为 $12+6+2=20$,故D错误. 故选AC.

5.12 【解析】 从任意一条棱出发,其他6个顶点中任选2个顶点都有3种与这条棱共面的情况,所以共面的情况有 $12 \times 3 = 36$ 种,而每条棱均重复计数三次,因此,从正方体的8个顶点中选取4个共面的不同顶点,有 $\frac{36}{3} = 12$ 种情况.



名师点拨 从正方体的棱出发找到与之共面的2个顶点,然后确定共面的情况数,注意其中重复计数的情况.

6.48 【解析】 对2 520分解质因数: $2\,520 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$, 它的正因数形如 $2^r \times 3^s \times 5^t \times 7^u$,

其中 $r \in \{0, 1, 2, 3\}, s \in \{0, 1, 2\}, t \in \{0, 1\}, u \in \{0, 1\}$, 因此依次确定 $r, s,$

避坑: 注意不要漏掉次数为0的情况

t, u 的值即得一个确定的正因数. 又 r, s, t, u 的取值分别有4种、3种、2种、2

种情况,则由分步乘法计数原理得,不同正因数的个数为 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$.

多种解法 对于一个数 $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}$, 其中 p_i 为质数, a_i 为正整数, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, 它的正因数个数 $d(N) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)$.

又 $2\,520 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$, 则根据这个公式可知, 2 520 的正因数个数为 $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 48$.

7.【解】 (1)分三类: 第一类,从高一年级选1个班,有6种不同的选法; 第二类,从高二年级选1个班,有7种不同的选法; 第三类,从高三年级选1个班,有8种不同的选法.

由分类加法计数原理知,共有 $6+7+8=21$ (种)不同的选法.

(2)分三步: 第一步,从高一年级选1个班,有6种不同的选法; 第二步,从高二年级选1个班,有7种不同的选法; 第三步,从高三年级选1个班,有8种不同的选法.

由分步乘法计数原理知,共有 $6 \times 7 \times 8 = 336$ (种)不同的选法.

(3)分三类,每类又分两步. 第一类,从高一、高二两个年级中各选1个班,有 $6 \times 7 = 42$ (种)不同的选法; 第二类,从高一、高三两个年级中各选1个班,有 $6 \times 8 = 48$ (种)不同的选法; 第三类,从高二、高三两个年级中各选1个班,有 $7 \times 8 = 56$ (种)不同的选法.

故共有 $42+48+56=146$ (种)不同的选法.

刷素养

8.84 【解析】 设正方形四个顶点分别为 A, B, C, D , 由题意可知相邻顶点不同色, 若 A 与 C 颜色相同, 则 A 有4种涂法, C 与 A 同色, 因此 C 仅有1种涂法, B 与 A, C 相邻, 不能与 A, C 同色, 有3种涂法, D 与 A, C 相邻, 不能与 A, C 同色, 有3种涂法, 根据分步乘法计数原理, 得 A 与 C 同色时共有 $4 \times 1 \times 3 \times 3 = 36$ (种)涂法;

若 A 与 C 颜色不同, 则 A 有4种涂法, C 与 A 不同色, 有3种涂法, B 与 A, C 相邻, 不能与 A, C 同色, 有2种涂法, D 与 A, C 相邻, 不能与 A, C 同色, 有2种涂法, 根据分步乘法计数原理, 得 A 与 C 不同色时共有 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ (种)涂法.

根据分类加法计数原理可知, 共有 $36+48=84$ (种)涂法.

6.2 排列与组合

6.2.1 排列 + 6.2.2 排列数

刷基础

1. AC 【解析】对于 A, 从 5 人中选 2 人担任正、副组长, 选出的 2 人顺序不同是不同的安排方法, 如选甲乙表示甲担任正组长, 乙担任副组长, 选乙甲表示乙担任正组长, 甲担任副组长, 故属于排列问题, 故 A 符合题意;
- 对于 B, 从 5 人中选 2 人参加演讲比赛, 与选出的 2 人的顺序无关, 比如选甲乙与乙甲是同一种选法, 所以不是排列问题, 故 B 不符合题意;
- 对于 C, 从 6 个景点中选 2 个安排两天的游览, 每天游览 1 个景点, 与顺序有关, 比如选 1, 2 两个景点表示第一天参观 1 号景点, 第二天参观 2 号景点, 选 2, 1 两个景点表示第一天参观 2 号景点, 第二天参观 1 号景点, 所以是排列问题, 故 C 符合题意;
- 对于 D, 从 10 个相同大小的球中选 3 个放入箱子里, 与选中的球的顺序无关, 故不是排列问题, 故 D 不符合题意. 故选 AC.

规律方法 判断一个具体问题是不是排列问题, 要看取出元素后排列是有序的还是无序的, 而检验它是否有顺序的依据就是变换元素的“位置” (这里的“位置”应视具体问题的性质和条件来决定), 看其结果是否有变化, 有变化就是排列问题, 无变化就不是排列问题.

2. 12 【解析】小明从甲、乙、丙、丁 4 幅不同的画中选 2 幅分别挂在书房和客厅, 则不同挂法有 $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$ 种.

链接教材 本题是教材第 20 页练习第 3 题的变式, 题目背景变了, 但是解题方法一致. 对无限制条件的排列问题, 如从 n 个不同元素中取出 $m (m \leq n)$ 个元素进行排列, 可以直接利用排列数公式 $A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$ 求出所有可能的情况种数.

3. C 【解析】因为 $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid A_n^2 \leq 6\}$, 所以根据排列数公式, 可得 $n(n-1) \leq 6$, 即 $n^2 - n - 6 \leq 0$, 解得 $-2 \leq n \leq 3$. 又因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 且 $n \geq 2$, 所以 $n = 2, 3$, 即 $B = \{2, 3\}$. 因为全集 $U = \{0, 1, 2, 3\}$, 所以根据补集的定义, 可得 $\complement_U B = \{0, 1\}$. 故选 C.

$$4. B \quad \text{【解析】} (x-2)(x-3)(x-4) \cdots (x-15) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4) \cdots (x-15)(x-16) \cdots 2 \cdot 1}{(x-16) \cdots 2 \cdot 1} =$$

敲黑板: 分子、分母配凑成均可用阶乘表示的形式

$$\frac{(x-2)!}{(x-16)!} = \frac{(x-2)!}{[(x-2)-14]!} = A_{x-2}^{14}, \text{ 故选 B.}$$

5. CD 【解析】 $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \neq 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = A_{10}^6$, 故 A 错误; $A_n^3 = \frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$, $A_{n-1}^3 + A_{n-1}^2 = (n-1)(n-2)(n-3) + (n-1)(n-2) = (n-1)(n-2)^2$, 则 $A_n^3 \neq A_{n-1}^3 + A_{n-1}^2$, 故 B 错误; $(n+1)A_n^m = (n+1) \cdot \frac{n!}{(n-m)!} =$

$$\frac{(n+1)!}{(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(m+1)]!} = A_{n+1}^{m+1},$$

$$\text{故 C 正确; } \frac{1}{n-m} A_n^{m+1} = \frac{1}{n-m} \cdot$$

$$\frac{n!}{(n-m-1)!} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 CD.

6. D 【解析】由 $\frac{A_n^7}{A_n^5} > 12$ 可得

$$\begin{cases} n \geq 7, \\ n \geq 5, \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} > 12, \end{cases}$$

避坑: 排列数符号要注意下标不小于上标

故 $(n-5)(n-6) > 12$ 且 $n \geq 7$, 化简得 $n^2 - 11n + 18 > 0$ 且 $n \geq 7$, 故 $n > 9$. 结合选项可知, D 正确.

7. B 【解析】数列排在第一道解答题位置的排序方法有 $A_4^4 = 24$ 种; 数列排在第二道解答题位置时, 第一道解答题有 $A_3^1 = 3$ 种排法, 第三、四、五道解答题有 $A_3^3 = 6$ 种排法, 根据分步乘法计数原理可得数列排在第二道解答题位置时的排序方法有 $3 \times 6 = 18$ 种.

根据分类加法计数原理可得不同的题目分配方式有 $24 + 18 = 42$ 种. 故选 B.

规律方法 位置分析法和元素分析法是解决排列问题最常用也是最基本的方法, 若以元素分析为主, 需先安排特殊元素, 再处理其他元素. 若以位置分析为主, 需先满足特殊位置的要求, 再处理其他位置. 若有多个约束条件, 往往是考虑一个约束条件的同时还要兼顾其他条件.

8. C 【解析】四位偶数要求个位上的数字为偶数, 且千位上的数字不能为 0, 按个位上的数字是否为 0 分两类计算:

第一类, 个位上的数字为 0, 只需从剩余的 1, 2, 3, 4 这 4 个数中选 3 个排列在千位、百位、十位上, 排列数为 $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$;

第二类, 个位上的数字为 2 或 4, 有 2 种选择, 千位上的数字不能为 0, 也不能与个位上的数字重复, 有 3 种选择, 剩余百位、十位从剩下的 3 个数中选 2 个排列, 排列数为 $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$, 则该情况下满足要求的数的总个数为 $2 \times 3 \times 6 = 36$.

综上, 由分类加法计数原理可得总共有 $24 + 36 = 60$ 个符合要求的四位偶数. 故选 C.

名师点拨 直接分类法是求解有限制条件排列问题的常用方法. 先选定一个适当的分类标准, 将要完成的事件分成几个类型, 分别计算每个类型中的排列数, 再由分类加法计数原理得出总数. 而对于分类过多的问题, 正难则反, 一般采用间接法处理.

9. A 【解析】甲要求星期一、星期日不值班, 且连续 3 天值班, 则可以安排在 (周二、周三、周四), (周三、周四、周五), (周四、周五、周六), 共 3 种情况, 剩下 4 个人进行全排列, 安排在剩下 4 天, 有 $A_4^4 = 24$ 种情况, 则有 $24 \times 3 = 72$ 种不同的安排方法. 故选 A.

名师点拨 特殊优先原则: 如果问题中有特殊元素或特殊位置, 那么优先考虑这些特殊元素或特殊位置.

10. C 【解析】两本《三国演义》要相邻, 可将其视为一个整体, 排列《三国演义》和其他三本书的方法有 A_4^4 种, 两本《三国演义》内部排列的方法有 A_2^2 种,

敲黑板: 先整体, 再局部

所以不同放书顺序共有 $A_4^4 A_2^2 = 48$ 种. 故选 C.

特别注意 (1) 相邻问题一般采用捆绑法, 将相邻元素“捆绑”为一个元素, 然后和其他元素进行排列. (2) 排列问题中注意关注同类元素是相同的还是不同的, 本题中《三国演义》两本书是不同的, 所以排列有顺序差异.

11. A 【解析】将 C 和 D 视为一个整体 (内部有 2 种排列), 则总共有 4 个元素 (捆绑体, A, B, E), 排列情况有 $2 \times$

$A_1^4 = 48$ 种.

C, D 相邻且 A 在第 1 位的情况:此时固定 A 在第 1 位, 剩余 3 个元素 (捆绑体, B, E) 全排列, 排列情况有 $2 \times A_3^3 = 12$ 种.

因此符合条件的出场顺序种数为 $48 - 12 = 36$. 故选 A.

12. 144 【解析】将 A, B 看成一个整体, 与除 C, D 外的两人进行全排列, 此时形成四个空, 再将 C, D 插入这四个空中, 则所有不同排法有 $A_2^2 A_3^3 A_4^4 = 144$ 种.

13. 72 【解析】要使“复旦附中”四个字互不相邻, “顶呱呱”三个字互不相邻, 则排列方式必为这两组字交替排列. 由于“复旦附中”有 4 个字, “顶呱呱”有 3 个字, 故排列形式必为 $ABABABA$, 其中 A 为“复旦附中”中的字, B 为“顶呱呱”中的字. “复旦附中”四个字的全排列有 $A_4^4 = 24$ 种, “顶呱呱”三个字的全排列有 $\frac{A_3^3}{A_2^2} = 3$ 种, 因此新的七字排列词的个数为 $24 \times 3 = 72$.

14. 【解】(1) 先选 3 人站前排有 A_3^3 种方法, 余下 4 人站后排有 A_4^4 种方法, 共有 $A_3^3 \times A_4^4 = 5\,040$ (种) 排列方法. (2) 捆绑法, 将 3 名女生看成一个整体, 有 A_3^3 种排法, 再与 4 名男生进行全排列有 A_5^5 种排法, 共有 $A_3^3 \times A_5^5 = 720$ (种) 排列方法.

(3) 插空法, 先排男生有 A_4^4 种排法, 再在 5 个空位中插入 3 名女生, 有 A_5^3 种排法, 所以共有 $A_4^4 \times A_5^3 = 1\,440$ (种) 排列方法.

(4) 分为两种情况:

①甲在排尾时有 A_6^6 种排法;

②甲不在排尾时, 甲从中间 5 个位置中选一个, 有 5 种排法, 乙可以排在除排尾和甲位置之外的 5 个位置, 有 5 种排法, 剩下 5 人全排列, 有 A_5^5 种排法, 则有 $25A_5^5$ 种排法.

所以共有 $A_6^6 + 25A_5^5 = 3\,720$ (种) 排列方法.

15. D 【解析】7 位同学排成一排准备照相, 共有 A_7^7 种排法, 如果保持原来 4 位同学的相对顺序不变, 那么有 $\frac{A_7^7}{A_4^4} = 210$ 种排法, 故选 D.

归纳总结 在有些排列问题中, 某些元素的前后顺序是确定的 (不一定相邻), 解决这类问题的基本方法有两种:

(1) 整体法, 即若有 $(m+n)$ 个元素排成一列, 其中 m 个元素之间的先后顺序确定不变, 先将这 $m+n$ 个元素排成一列, 有 A_{m+n}^{m+n} 种不同的排法, 然后任取一个排列, 固定其他 n 个元素的位置不动, 把这 m 个元素交换顺序, 有 A_m^m 种排法, 其中只有一个排列是我们需要的, 因此共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种满足条件的不同排法.

(2) 插空法, 即 m 个元素之间的先后顺序确定不变, 因此先排这 m 个元素, 只有一种排法, 然后把剩下的 n 个元素分类或分步插入由以上 m 个元素形成的空隙中.

16. A 【解析】首先将 6 只灯笼全排列, 有 A_6^6 种排法, 因为每次只能取其中一串最下面的一只灯笼并解答里面的谜题, 每串灯笼的顺序确定, 所以需要除以内部排序, 所以答题顺序共有 $\frac{A_6^6}{A_3^3 A_2^2} = 60$ (种). 故选 A.

17. A 【解析】用 3, 4, 5, 6, 7, 9 这 6 个数字组成没有重复数字的六位奇数, 个位上的数字为 3, 5, 7, 9 中的一个, 有 4 种选法, 其余五个数位上的数字进行全排列, 有 A_5^5 种, 故这样的六位奇数共有 $4A_5^5 = 480$ (个), **A 正确**; 在这样的六位数中, 3, 5, 7, 9 相邻, 将 3, 5, 7, 9 捆绑, 有 A_4^4 种排法, 再与 4, 6 进行全排列, 有 A_3^3 种排法, 故共有 $A_4^4 A_3^3 = 144$ (个), **B 错误**; 在这样的六位数中, 4, 6 不相邻, 先将 3, 5, 7, 9 进行全排列, 再从形成的五个空位中任选两个将 4, 6 排列, 故共有 $A_4^4 A_2^2 = 480$ (个), **C 错误**; 在这样的六位数中, 3, 5, 7, 9 这 4 个数从左到右按照从小到大排序的共有 $\frac{A_6^6}{A_4^4} = 30$ (个), **D 错误**. 故选 A.

刷易错

★易错点 1 不能正确理解题意致误

18. B 【解析】在 8 个人全排列的方法数中减去甲、乙、丙全相邻的方法数, 就得到甲、乙、丙三人不全相邻的方法数, 即 $A_8^8 - A_6^6 \times A_3^3$. 故选 B.

易错警示 本题中“甲、乙、丙三人不全相邻”是指甲、乙、丙三人不能同时相邻, 但允许其中有两人相邻, 若将“甲、乙、丙三人不全相邻”误认为是“甲、乙、丙三人互不相邻”

的情况, 则会产生以下误解: 甲、乙、丙三人以外的 5 人先排, 有 A_5^5 种排法, 5 人排好后产生 6 个空, 插入甲、乙、丙三人有 A_6^3 种排法, 这样共有 $A_5^5 A_6^3$ 种排法, 导致错选 A.

★易错点 2 忽视排列数公式的隐含条件致误

19. 【解】(1) 因为 $\frac{A_n^7 - A_n^5}{A_n^5} = \frac{\frac{n!}{(n-7)!} - \frac{n!}{(n-5)!}}{\frac{n!}{(n-5)!}} = 1 =$

89, 则 $\frac{(n-5)!}{(n-7)!} = (n-5)(n-6) = 90$,

即 $n^2 - 11n - 60 = (n-15)(n+4) = 0$,

又 $n \geq 7$ 且 $n \in \mathbf{N}^+$, 则 $n = 15$.

(2) 由 $nA_n^3 > 3A_n^2$ 得 $n \cdot n(n-1)(n-2) > 3n(n-1)$,

因为 $n \geq 3$ 且 $n \in \mathbf{N}^+$, 所以 $n(n-2) > 3$, 即 $(n-3)(n+1) > 0$, 解得 $n > 3$ 且 $n \in \mathbf{N}^+$.

由 $A_8^{n+2} > 6A_8^n$ 得 $\frac{8!}{(6-n)!} > 6 \times \frac{8!}{(8-n)!}$,

化简得 $(8-n)(7-n) > 6$, 即 $(n-10) \cdot (n-5) > 0$, 解得 $n > 10$ 或 $n < 5$.

又因为 $n+2 \leq 8$, $n \in \mathbf{N}^+$, 所以 $n < 5$, $n \in \mathbf{N}^+$.

综上, $3 < n < 5$ 且 $n \in \mathbf{N}^+$, 故 $n = 4$.

易错警示 在解答排列数的方程或不等式时, 要注意排列数 A_n^m 中 $m, n \in \mathbf{N}^+$ 且 $m \leq n$ 这些限制条件, 要注意含排列数的方程和不等式中未知数的取值范围.

6.2.3 组合 + 6.2.4 组合数

刷基础

1. BCD 【解析】对于 A, 从 3 名同学中选出 2 名同学后分配到两个乡镇涉及顺序问题, 是排列问题, **A 不符合题意**; 对于 B, 从 7 人中选出 4 人去观看不涉及顺序问题, 是组合问题, **B 符合题意**; 对于 C, 射击命中不涉及顺序问题, 是组合问题, **C 符合题意**; 对于 D, 乘法满足交换律, 两数相乘不涉及顺序问题, 是组合问题, **D 符合题意**. 故选 BCD.

规律方法 判断一个问题是否为组合问题, 关键是判断问题是否与顺序有关, 可以结合条件理解, 也可以选择一结果, 交换这个结果中两个对象的先后顺序, 看是否对结果产生影响, 若无影响, 则是组合问题. 总之, 若与顺序有关, 则是排列问题; 若与顺序无关, 则是组合问题.

2. D 【解析】第一步,选择主食,有 C_4^1 种不同的选择情况;
第二步,选择菜品,有 C_8^2 种不同的选择情况,
故不同的搭配方案有 $C_4^1 \times C_8^2 = 4 \times 28 = 112$ 种. 故选 D.

3. A 【解析】关于 x 的不等式 $x^2 - 2x - m > 0$ 的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > n\}$,
则有 $\begin{cases} -2+n=2, \\ -2n=-m, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} n=4, \\ m=8, \end{cases}$ 故 $C_m^n = C_8^4 = 70$. 故选 A.

4. BD 【解析】对于 A, $C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!}$, 故 A 错误;
对于 B, $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$, $nA_{n-1}^{m-1} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$, 所以 $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$, 故 B 正确;
对于 C, $C_5^2 + C_6^3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 10 + 20 = 30$, 又 $C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$, 所以 $C_5^2 + C_6^3 \neq C_7^3$, 故 C 错误;
对于 D, 因为 $C_{16}^{x^2-x} = C_{16}^{5x-5}$, 所以 $x^2 - x = 5x - 5$ 或 $x^2 - x + 5x - 5 = 16$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 5$ 或 $x = 3$ 或 $x = -7$, 经检验 $x = 1$ 或 $x = 3$ 符合题意, 故满足方程 $C_{16}^{x^2-x} = C_{16}^{5x-5}$ 的 x 值可能为 1 或 3, 故 D 正确. 故选 BD.

链接教材 本题是教材第 24 页例 6 的变式与延伸, 考查利用组合数公式进行计算、化简、证明.

组合数公式 $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1) \cdots [n-(m-1)]}{m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$ 通常用于计算、求值;
 $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{(n-m)! m!}$ 通常用于化简、证明.

5. D 【解析】由题意可知, 第 n ($n \in \mathbf{N}$) 行的第 3 个机器人的动作难度为 C_n^2 , 则从第 3 行到第 2025 行, 每行第 3 个机器人动作难度之和为 $C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{2025}^2 = C_3^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{2025}^2 = C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{2025}^2 - 1 = C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{2025}^2 - 1 = \cdots = C_{2025}^2 + C_{2025}^2 - 1 = C_{2026}^2 - 1$. 故选 D.

敲黑板: 组合数性质: $C_n^m = C_n^{n-m}$

6. 3 360 【解析】第一步, 先为男生甲安排一个除语文外的其他学科课代表, 有 $C_4^1 = 4$ 种方法;
第二步, 再从剩余的 7 人中选出 4 人, 有 $C_7^4 = 35$ 种方法;

第三步, 选出的 4 人全排列, 有 $A_4^4 = 24$ 种方法.
根据分步乘法计数原理, 共有不同选法 $4 \times 35 \times 24 = 3\,360$ (种).

7. 185 【解析】将只会印刷的 4 人作为分类标准, 问题可分为三类:
第一类: 只会印刷的 4 人全被选出, 有 $C_4^4 C_7^4$ 种选法;
第二类: 从只会印刷的 4 人中选出 3 人, 有 $C_4^3 C_7^1 C_6^4$ 种选法;
第三类: 从只会印刷的 4 人中选出 2 人, 有 $C_4^2 C_7^2 C_5^4$ 种选法.
所以共有 $C_4^4 C_7^4 + C_4^3 C_7^1 C_6^4 + C_4^2 C_7^2 C_5^4 = 185$ (种) 不同的选法.

8. D 【解析】一次性买 4 个盲盒的购买种数为 C_{25}^4 ,
买到的盲盒中没有故宫联名隐藏款的购买种数为 C_{20}^4 ,
所以买到的盲盒中至少有 1 个故宫联名隐藏款的购买种数为 $C_{25}^4 - C_{20}^4$. 故选 D.

链接教材 本题是教材第 25 页例 7 第(3)问的变式, 对于“至多”“至少”问题, 可以采用间接法, 用所有可能的种数减去不符合条件的种数, 即得所求的种数.

9. C 【解析】①测试 2 次找到 2 个无法正常运行的程序, 则不同的测试次序有 A_2^2 种;
②测试 3 次找到 2 个无法正常运行的程序, 则不同的测试次序有 $C_1^1 C_2^2 A_2^2$ 种;
③测试 4 次找到 2 个无法正常运行的程序, 则不同的测试次序有 $C_2^2 C_2^1 A_3^3$ 种;
④测试 4 次找到 4 个正常运行的程序, 则不同的测试次序有 A_4^4 种.
综上, 不同的测试次序共有 $A_2^2 + C_1^1 C_2^2 A_2^2 + C_2^2 C_2^1 A_3^3 + A_4^4 = 114$ 种. 故选 C.

规律方法 (1) 对于题目中对选取“方式”有要求“至多”“至少”的问题, 可进行分类讨论.

(2) 对于题目中对选取“结果”有要求“至多”“至少”以及“含”与“不含”等关键字的问题, 也可采用“正难则反”的思想方法, 注意, 此时需要“正面”的分类种数多于“反面”的分类种数, 这样才能起到简化问题的作用.

10. A 【解析】将五个相同的奖品排成一排, 在中间的四个空位中插入两个隔板, 共有 $C_4^2 = 6$ 种方法, 因此奖品的奖励方法种数为 6. 故选 A.

规律方法 相同元素分组分配问题一般采用“隔板法”, 可以将相同的元素理解为被串起来的糖果, 只需要剪断中间的一些连接处即可达到分组分配的目的. 此种方法需要满足每一个组至少分配到 1 个元素. 对于分配元素超过或者少于 1 个的情况, 需要拿走或补上元素, 使得问题化归为“每一个组至少分配到 1 个元素”的情况求解.

11. B 【解析】 $\because x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$,
 $\therefore (x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) + (x_5 + 1) = 14$,
则问题转化为将 14 个相同的元素分成 5 份, 每份至少 1 个,
则需要在 14 个元素之间的 13 个空隙中插入 4 个隔板,

点悟: 将方程解的个数问题, 转化为相同元素的分组分配问题, 再利用隔板法求解.

因此方程非负整数解的个数为 $C_{13}^4 = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 715$. 故选 B.

12. 15 【解析】首先分给甲 1 个球, 乙 2 个球, 丙 3 个球, 还剩下 4 个球.
① 4 个球分给 1 个人, 有 3 种分法.
② 4 个球分给 2 个人, 若其中 1 人 3 个, 1 人 1 个, 有 $A_3^2 = 6$ (种) 分法; 若其中 2 人都是 2 个, 有 3 种分法.
③ 4 个球分给 3 个人, 只有 1, 1, 2 这种情况, 有 3 种分法.
按照分类加法计数原理可得, 一共有 $3 + 6 + 3 + 3 = 15$ (种) 分法.

多种解法 先给乙 1 个球, 给丙 2 个球, 则题目转化为有 7 个相同的小球, 现全部分给甲、乙、丙 3 人, 每人至少得 1 个球, 则可将 7 个球排成一列, 在排除两端的 6 个空位中, 插入 2 个隔板, 共有 $C_6^2 = 15$ (种) 分法.

13. C 【解析】先从剩下 5 本书中选择 1 本给甲, 再从剩下 4 本书中选择 2 本给乙, 剩下 2 本自然归丙, 共有 $C_5^1 C_4^2 = 30$ 种分法. 故选 C.

14. C 【解析】把这 5 名同学分配到 3 个不同的活动展台, 每个展台至少安排 1 名同学, 分组方式有两种:
① 按 1, 1, 3 分组: 先从 5 名同学中选 3 名为一组, 剩下的 2 名各成一组, 可得不同的分组数为 $C_5^3 = 10$;
② 按 2, 2, 1 分组: 先从 5 名同学中选 2 名为一组, 再从剩下的 3 名同学中选 2 名为一组, 最后 1 名为一组, 可得不同的分组数为 $\frac{C_5^2 C_3^2 C_1^1}{A_2^2} = 15$.

最后将分好的组分配到3个不同的活动展台,共有 $(10+15) \times A_3^3 = 150$ 种不同的分配方案. 故选C.

归纳总结 不同元素分组分配问题,往往是先分组再分配. 在分组时,通常有三种类型:①不均匀分组;②完全均匀分组;③部分均匀分组. 特别注意均匀分组需要除以对应均分组数的阶乘,并注意区分分组分配的是相同元素还是不同元素,两种题型解题方法截然不同.

15. 【解】(1)6名教师选1名到甲学校任教有 C_6^1 种方法,从剩余的5名教师中选2名到乙学校任教有 C_5^2 种方法,剩余3名教师都分配到丙学校去任教有 C_3^3 种方法,则三所学校中甲学校1人、乙学校2人、丙学校3人的分配方法共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ 种.

(2)6名教师按1,1,4分为三个组,有 C_6^4 种分法,则三所学校中一学校4人,另外两校各1人的分配方法共有 $C_6^4 A_3^3 = 90$ 种.

(3)由题可得6名教师的分组方案有1,2,3;1,1,4;2,2,2三类情况,

①6名教师按1,2,3分为三个组有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3$ 种方法,则6人分配到三所学校共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 = 360$ 种分配方法;

②由(2)可知6名教师按1,1,4分为三个组,再分配到三所学校共有90种分配方法;

③6名教师平均分配到三所学校共有 $C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ 种分配方法.

综上,6人分配到三所学校,每所学校至少1人,有 $360+90+90=540$ 种分配方法.

规律方法 n 个不同的元素按某些条件分配给 k 个不同的对象是分配问题,解决此类问题,常先分组后分配.

16. B 【解析】由于甲、乙去看同一场比赛,将甲、乙视为一个整体,此时共得到4个观看主体(甲、乙整体1个,另外3名同学各1个).

要求三场比赛均有同学观看,需将4个观看主体分为3组,每组至少1个观看主体,分组形式为2个观看主体为1组,剩余2个观看主体各为1组,分组种数为 C_4^2 .

将分好的3组分配到三场不同的比赛,全排列的种数为 A_3^3 ,则不同选择的总种数为 $C_4^2 A_3^3 = 36$. 故选B.

17. B 【解析】体育课排在下午共 C_2^1 种

排法,因为数学与物理不相邻,分两类:

第一类:数学与物理有一科在下午,另一科在上午与其他科排列,共 $C_2^1 A_5^5$ 种排法;

第二类:数学与物理均在上午且不相邻,先在语文、英语、化学、生物中选一科排在下午共 C_4^1 种排法,再把剩下3科排在上午共 A_3^3 种排法,在它们中间及两端共4个空位安排数学与物理,有 A_4^2 种排法,由分步乘法计

数原理得,共 $C_4^1 A_3^3 A_4^2$ 种排法.

所以共有 $C_2^1 (C_2^1 A_5^5 + C_4^1 A_3^3 A_4^2) = 2 \times (2 \times 120 + 4 \times 6 \times 12) = 1056$ 种排法. 故选B.

名师点拨 求解排列组合问题要遵循两个原则:一是按元素(或位置)的性质进行分类;二是按事情发生的过程进行分步. 具体地说,求解排列组合问题常以元素(或位置)为主体,即先满足特殊元素(或位置),再考虑其他元素(或其他位置).

刷易错

★易错点1 未关注组合数中字母的取值范围致误

18. C 【解析】由题意知 $5n(n-1) = 3 \times \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$,解得 $n=3$ 或 $n=1$.

要使 A_n^2 和 C_{2n-1}^2 有意义,则 $\begin{cases} n \geq 2, \\ 2n-1 \geq 2, \end{cases}$ 即 $n \geq 2$,所以 $n=3$,故选C.

易错警示 (1)排列数 A_n^m 和组合数 C_n^m 均需要满足 $m \leq n$;

(2)应用 $C_n^m = C_n^n - C_n^m$ 可以得到 $m=p$ 或 $m+p=n$ 两种情况. 切忌只考虑两者相等的情况,而忽略了 $m+p=n$ 的情况,从而导致错误.

★易错点2 不能正确判断是排列还是组合致误

19. C 【解析】采用插空法,先排4个1,有1种排法,4个1产生5个空,若2个0相邻,则有 $C_5^1 = 5$ 种排法;若2个0不相邻,则有 $C_5^2 = 10$ 种排法. 综上,不同的排法种数为 $5+10=15$. 故选C.

易错警示 本题是相同元素的排序问题,可以看作是一个组合问题,本题易误认为是排列问题而出错.

20. B 【解析】四门竞赛课程有3名同学选择,每门课程恰有1人选择,那么有1名同学选择了两门课程,剩下两门课程由余下2名同学选择. 先从3名同学中选出1人,此人再选择两门课程,剩余2人选课程即进行全排列,所以不同的选择方法种数为 $C_3^1 C_4^2 A_2^2 = 36$. 故选B.

易错警示 本题要注意先选出特殊的人(这个人要选两门课程),再选出特殊的课程(这两门课程被这个人选择),最后无限制的2人选剩余的两门课程,因为课程是不同的学科,剩余的这2人也不同,所以是排列问题.

★易错点3 没能正确理解题意导致重复计数

21. A 【解析】3名志愿者为1名男生,2名女生时,选法的种数为 $C_4^1 C_2^2 = 4$;
3名志愿者为2名男生,1名女生时,选法的种数为 $C_4^2 C_2^1 = 12$.
所以根据分类加法计数原理可知,至少有1名男生和1名女生的选法共有 $4+12=16$ (种). 故选A.

易错警示 常见错解:先选1名男生和1名女生,共 $C_4^1 C_2^1 = 8$ (种),然后再在剩余男女生(共4人)中选1名共 $C_4^1 = 4$ (种),最后利用分步乘法计数原理得有 $8 \times 4 = 32$ (种). 此法错误在于重复计数,如“先选男生A女生B,再选男生C”与“先选男生C女生B,再选男生A”实际上是同一种组合.

第6.2节综合训练

刷能力

1. D 【解析】甲和乙之间恰好有1人,有两种情况:

甲和乙之间为丙或丁,则丙、丁一定不相邻,把甲、乙和中间一人看作整体,与剩下两人全排列,则共有 $C_2^1 A_2^2 A_3^3 = 24$ 种排列方法;

甲和乙之间为戊,则仅当甲、乙在二、四位符合条件,有 $A_2^2 A_2^2 = 4$ 种排列方法.

综上,不同的排法共有 $24+4=28$ 种. 故选D.

2. D 【解析】由题意,要求每个乡镇分配3名医生,且每个乡镇至少有1名主治医师,则主治医师的分组方案有2种,即“2+2+1”或“3+1+1”. 当主治医师按照“2+2+1”分组时,主治医师的分法种数为 $\frac{C_3^2 C_2^2 C_1^1}{A_2^2} = 15$,再将4名实习医生按照“1+1+2”与之配成对应的

三组,分法种数为 $C_4^1 C_3^1 = 12$,最后将分好的三组分配到 3 个乡镇,分配方法种数为 A_3^3 ,根据分步乘法计数原理得不同的分配方法种数为 $15 \times 12 \times A_3^3 = 1\ 080$;

当主治医师按照“3+1+1”分组时,主治医师的分法种数为 $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} = 10$,再

将 4 名实习医生按照“0+2+2”与之配成对应的一组,分法种数为 $C_4^2 = 6$,最后将分好的三组分配到 3 个乡镇,分配方法种数为 A_3^3 ,根据分步乘法计数原理得不同的分配方法种数为 $10 \times 6 \times A_3^3 = 360$.

根据分类加法计数原理得不同的分配方法种数为 $1\ 080 + 360 = 1\ 440$. 故选 D.

名师点拨 本题考查排列、组合的综合应用,两个计数原理的运用. 排列、组合综合题目,一般是将符合要求的元素取出(组合)或进行分组,再对取出的元素或分好的组进行排列. 其中分组时,要注意“平均分组”与“不平均分组”的差异及分类的标准.

3. D 【解析】第一步,确定数字、字母和符号的类别位置:

第一行数字、字母和符号的排列有 $A_3^3 = 6$ 种,

第二行是第一行的错位排列,则排列方式有 2 种,

第三行排列方式唯一确定,

因此类别位置的排列方式有 $6 \times 2 = 12$ (种).

第二步,分别确定三个数字、字母和符号放入类别位置的排列数:

数字(1,2,3)放入 3 个数字位置,排列数为 $A_3^3 = 6$;

字母(a,b,c)放入 3 个字母位置,排列数为 $A_3^3 = 6$;

符号(★,♥,☼)放入 3 个符号位置,排列数为 $A_3^3 = 6$.

根据分步乘法计数原理可得总排法有 $12 \times 6 \times 6 \times 6 = 2\ 592$ (种). 故选 D.

4. AC 【解析】对于 A,将 7 个小球分成 3 组即可,由隔板法得不同的放法种数为 $C_6^2 = 15$,故 A 正确.

对于 B,允许有空盒子,先给每个盒子 1 个虚拟的球,每个盒子至少放 1 个小球,即 10 个小球分成 3 组,

由隔板法得不同的放法种数为 $C_9^2 = 36$,故 B 错误.

对于 C,根据题意,每个盒子里球的个

数情况有:5,1,1;4,2,1;3,3,1;3,2,2.

避坑: 注意与小球相同、盒子不同的分法情况区分开

则不同的放法种数为 $\frac{C_5^5 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} + C_7^4 C_3^2 +$

$\frac{C_7^3 C_4^3}{A_2^2} + \frac{C_7^3 C_4^2}{A_2^2} = 301$,故 C 正确.

对于 D,小球相同、盒子不同,恰有 1 个盒子放 2 个球(即只有 1 个盒子里放 2 个球),则放 2 个球的盒子有 $C_3^1 = 3$ 种选法,其余两个盒子共放 5 个球,每个盒子至少放 1 个球且不能放 2 个球,放法只有(1,4),(4,1),共 2 种,则总放法为 $3 \times 2 = 6$ 种,故 D 错误. 故选 AC.

5. 48 【解析】因为甲不是第 1 名,乙不是第 2 名,且丙的名次比甲更靠前,所以可按照丙的名次进行分类.

当丙是第 1 名时,此时甲可以是第 2,3,4,5 名,分情况讨论:

若甲是第 2 名,乙可以是第 3,4,5 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_3^1 A_2^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 种;

若甲是第 3 名,乙可以是第 4,5 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_2^1 A_2^2 = 2 \times 2 \times 1 = 4$ 种;

若甲是第 4 名,乙可以是第 3,5 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_2^1 A_2^2 = 2 \times 2 \times 1 = 4$ 种;

若甲是第 5 名,乙可以是第 3,4 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_2^1 A_2^2 = 2 \times 2 \times 1 = 4$ 种,

所以当丙是第 1 名时,总的排名情况有 $6+4+4+4=18$ 种.

当丙是第 2 名时,此时甲可以是第 3,4,5 名,分情况讨论:

若甲是第 3 名,乙可以是第 1,4,5 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_3^1 A_2^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 种;

若甲是第 4 名,乙可以是第 1,3,5 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_3^1 A_2^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 种;

若甲是第 5 名,乙可以是第 1,3,4 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_3^1 A_2^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 种.

所以当丙是第 2 名时,总的排名情况有 $6+6+6=18$ 种.

当丙是第 3 名时,此时甲可以是第 4,5 名,分情况讨论:

若甲是第 4 名,乙可以是第 1,5 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_2^1 A_2^2 = 2 \times 2 \times 1 = 4$ 种;

若甲是第 5 名,乙可以是第 1,4 名,剩

下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_2^1 A_2^2 = 2 \times 2 \times 1 = 4$ 种.

所以当丙是第 3 名时,总的排名情况有 $4+4=8$ 种.

当丙是第 4 名时,此时甲只能是第 5 名,乙可以是第 1,3 名,剩下丁和戊全排列,此时的排名情况有 $A_2^1 A_2^2 = 2 \times 2 \times 1 = 4$ 种.

将上述各类情况数相加,可得总的排名情况有 $18+18+8+4=48$ 种,

所以 5 款模型的排名情况有 48 种.

6. 思路导引 (1) ①老师位置固定在中间,甲、乙两名学生必须与老师相邻,先安排甲、乙两人的位置,再对其余无限制的 4 名学生进行全排列,最后根据分步乘法计数原理求解;

②先安排老师在排头或排尾,然后排男生,再利用插空法安排互不相邻的女生,最后根据分步乘法计数原理计算.

(2) 先从 6 名学生中选出 1 人与老师留在原地,然后将剩余 5 名学生按 2,2,1 或 3,1,1 的分组方式进行分组,再将各组分配到 3 个服务站点,最后求解计算.

【解】(1) ①因为老师站在最中间,甲、乙两名学生站在老师的两侧且与老师相邻,

所以老师站在第 4 个位置,甲、乙两名学生的排序方式有 A_2^2 种.

再排其他学生,有 A_4^4 种排法,由分步乘法计数原理得,不同的排法有 $A_2^2 A_4^4 = 48$ 种.

②老师排在排头或排尾有 C_2^1 种方法,其余 6 名学生用插空法处理:先排 3 名男生有 A_3^3 种排法,形成 4 个空位,再将 3 名女生排入这 4 个空位,有 A_4^3 种排法,由分步乘法计数原理得,不同的排法有 $C_2^1 A_3^3 A_4^3 = 288$ 种.

(2) 从 6 名学生中选出 1 名与老师留在原地,有 C_6^1 种选法.

其余 5 名同学分配到 3 个站点,可分为 1 人、2 人、2 人或 1 人、1 人、3 人.

如果分为 1 人、2 人、2 人,那么有 $\frac{C_5^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2}$ 种分法,

如果分为 1 人、1 人、3 人,那么有 $\frac{C_5^1 C_4^1 C_3^3}{A_2^2}$ 种分法,

再将这 3 组对应 3 个站点进行全排列,得不同的分配方式有 $C_6^1 \times \left(\frac{C_5^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2} + \frac{C_5^1 C_4^1 C_3^3}{A_2^2} \right) A_3^3 = 900$ 种.

刷素养

7. 41 【解析】设 $f(1) = m (m \in A)$, 则 $f(m) = 1, f(f(m)) = f(1) = m = 1$.

即 $f(1) = 1$ 恒成立, 考虑 $f(2), f(3), f(4), f(5)$ 中 1 的个数.

(1) 有 4 个只有 1 种; (2) 有 3 个有 $C_4^1 \times 3 = 12$ 种; (3) 有 2 个有 $C_4^2 \times 2 \times 2 = 24$ 种; (4) 有 1 个有 $C_4^3 = 4$ 种. 综上, 共有 $1 + 12 + 24 + 4 = 41$ 种.

8. 136 800 【解析】考虑对凸二十边形分类讨论, 有四种情况:

①三角形的三个顶点均为凸二十边形的顶点, 只需从 20 个顶点中任选 3

个, 此时三角形个数为 $C_{20}^3 = 1\,140$.

②三角形的一个顶点为两条对角线在凸二十边形的内部交点, 其余两个顶点为凸二十边形的顶点, 4 个凸二十边形的顶点形成的两条对角线会交于 1 个内部点, 恰好对应 4 个满足条件的这类三角形, 所以三角形个数为 $4 \times C_{20}^4 = 19\,380$.

③三角形的一个顶点为原凸二十边形的顶点, 两个顶点是对角线在凸二十边形的内部交点, 则任选 5 个原凸二十边形的顶点, 这 5 个顶点形成的对角线相交得到内部交点, 对应 5 个满足

条件的这类三角形, 所以三角形个数为

点悟: 这 5 个顶点中的每一个都可作为一个三角形的顶点, 故对应 5 个三角形

$$5 \times C_{20}^5 = 77\,520.$$

④三角形的三个顶点都为凸二十边形的内部交点, 则任选 6 个原凸二十边形顶点, 这 6 个顶点的对角线相交得到的内部交点, 恰好构成 1 个满足条件的这类三角形, 所以三角形个数为 $C_{20}^6 = 38\,760$.

故所求三角形总数为 $1\,140 + 19\,380 + 77\,520 + 38\,760 = 136\,800$.

专题 1 排列组合的综合

刷难关

1. A 【解析】第 1 个节日和最后 1 个节日已确定, 只需安排其余 9 个节日:

第一步, 4 个音乐节目在第 2, 5, 7, 10 的位置, 安排方法有 $A_4^4 = 24$ 种;

第二步, 安排 3 个舞蹈节目, 现在空余位置为 $\{3, 4, 6, 8, 9\}$, 从空位 $\{3, 4\}$ 中选 1 个, 从空位 $\{8, 9\}$ 中选 1 个, 再加上空位 $\{6\}$ 安排舞蹈节目, 安排方法有 $C_2^1 \times C_2^1 \times A_3^3 = 24$ 种;

第三步, 此时剩余的 2 个位置必然不相邻, 用来安排 2 个曲艺节目, 满足 2 个曲艺节目不相邻, 安排方法有 $A_2^2 = 2$ 种. 由分步乘法计数原理知, 总安排方法为 $24 \times 24 \times 2 = 1\,152$ 种. 故选 A.

2. A 【解析】当千位数是 4 时, 比 2 025 大的偶数, 先填个位数, 再从余下的 3 个数中选 2 个作全排列, 有 $A_2^2 A_3^3 = 12$ 个.

当千位数是 3 时, 比 2 025 大的偶数, 先填个位数, 再从余下的 3 个数中选 2 个作全排列, 有 $A_3^3 A_3^3 = 18$ 个.

当千位数是 2 时, 分成两类情况: ①个位是 0 且比 2 025 大, 在余下的 3 个数中任选 2 个作全排列, 有 $A_3^3 = 6$ 个;

②个位是 4 且比 2 025 大的偶数有 2 104, 2 034, 2 304, 2 134, 2 314, 共 5 个.

综上, 比 2 025 大的偶数共有 $12 + 18 + 6 + 5 = 41$ 个. 故选 A.

3. ACD 【解析】对于 A, 哪吒每次使用两件法宝有 $C_7^2 = 21$ 种方法, 对阵 3 次, 因为可以重复使用, 所以不同的使用法宝的方法有 21^3 种, 故 A 正确;

对于 B, 将 7 件法宝分成 3 组, 每组至少 2 件, 共有 $\frac{C_7^2 C_5^2 C_3^3}{A_2^2}$ 种分法, 则对阵 3

次, 不同的使用法宝的方法有 $\frac{C_7^2 C_5^2 C_3^3}{A_2^2} A_3^3 = 3C_7^2 C_5^2 C_3^3$ 种, 故 B 错误;

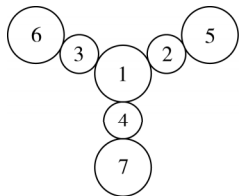
对于 C, 先将除乾坤圈、风火轮以外的 5 件法宝排列, 共有 A_5^5 种方法, 再利用插空法将乾坤圈、风火轮插入 6 个空位置中, 则不同的使用法宝的方法有 $A_5^5 A_6^2$ 种, 故 C 正确;

对于 D, 先将 7 件法宝全排列, 共有 A_7^7 种方法, 再利用倍缩法得不同的使用法宝的方法有 $\frac{A_7^7}{A_3^3} = A_4^4$ 种, 故 D 正确. 故选 ACD.

点悟: A_7^7 种排列方法中包含了乾坤圈、风火轮、火尖枪三件法宝所有的 A_3^3 种排列顺序, 但其顺序已定, 实际只能有 1 种

规律方法 解决多种限定条件的排列组合综合问题, 首先要注意每一个限制条件下的方法 (如相邻问题捆绑法、定序问题倍缩法等), 然后综合多种方法, 或者分类进行解答.

4. C 【解析】对该挂件进行如图所示的编号:



依题意知 1 号有 4 种涂色方法, 2, 3, 4 号有 $A_3^3 = 6$ 种涂色方法, 分情况讨论 5, 6, 7 号的涂色方法.

第一种: 若 5 号与 1 号同色, 6 号与 2 号同色, 则 7 号只有 1 种涂色方法, 因此 5, 6, 7 号有 $1 \times 1 \times 1 = 1$ 种涂色方法;

第二种: 若 5 号与 1 号同色, 6 号与 2 号异色, 此时 6 号只有 1 种涂色方法,

则 7 号有 2 种涂色方法,

因此 5, 6, 7 号有 $1 \times 1 \times 2 = 2$ 种涂色方法;

第三种: 若 5 号与 1 号异色, 与 3 号同色, 此时 5 号只有 1 种涂色方法,

当 6 号与 4 号同色时, 则 7 号有 2 种涂色方法,

当 6 号与 4 号异色时, 6 号有 2 种涂色方法, 7 号有 1 种涂色方法,

因此 5, 6, 7 号有 $1 \times (1 \times 2 + 2 \times 1) = 4$ 种涂色方法;

第四种: 若 5 号与 1 号、3 号均异色, 则 5 号只有 1 种涂色方法, 6 号、7 号均有 2 种涂色方法,

因此 5, 6, 7 号有 $1 \times 2 \times 2 = 4$ 种涂色方法.

综上所述, 所有涂色方法种数为 $4A_3^3 \times (1 + 2 + 4 + 4) = 264$. 故选 C.

链接教材 本题是教材第 27 页习题 6.2 第 17 题的变式与延伸, 解决涂色问题需要注意可选颜色的种数和对涂色的要求.

5. 72 48 【解析】当只用 3 种颜色时, A, C 同色, B, D 同色且 P 与两组皆异色, 所以有 $A_4^3 = 24$ 种涂法.

当用 4 种颜色时, 只有 A, C 同色或只有 B, D 同色, 所以从 A, C 和 B, D 两组中选一组涂相同颜色, 把这两个顶点看成一组, 再将 4 种颜色进行全排列, 故有 $C_2^1 C_4^4 = 48$ 种涂法.

综上, 共有 $24 + 48 = 72$ 种涂法, 其中 4 种颜色全部使用时有 48 种涂法.

6. 414

思路导引 由题意得, $d_i \geq 0$, 可设这 9 个 d_i 中, 有 x 个 0, y 个 1, z 个 2, 且满足 $0 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z = 14$, 根据 x ,

y, z 取值的限定, 求解出不同情况对应的排列数, 再将排列数相加即得最终的数列个数.

【解析】 因为数列 $\{a_n\}$ 共有 10 项, $a_1 = 1, a_{10} = 15$, 且 $a_{i+1} = a_i + d_i, d_i \in \{0, 1, 2\} (1 \leq i \leq 9, i \in \mathbf{N}^*)$,

所以对递推关系累加整理可得 $a_{10} =$

$$a_1 + \sum_{i=1}^9 d_i, \text{ 所以 } \sum_{i=1}^9 d_i = 14.$$

设这 9 个 d_i 中, 有 x 个 0, y 个 1, z 个 2,

$$\text{则满足 } \begin{cases} x+y+z=9 \text{ ①,} \\ 0 \cdot x+1 \cdot y+2 \cdot z=14 \text{ ②,} \end{cases}$$

由②得 $y = 14 - 2z$, 代入①, 得 $x + 14 - 2z + z = 9$, 则 $x = z - 5$.

由 x, y, z 为非负整数, 得 $x = z - 5 \geq 0 \Rightarrow$

$z \geq 5, y = 14 - 2z \geq 0 \Rightarrow z \leq 7$, 则 $5 \leq z \leq 7$,

因此 z 的可能取值为 5, 6, 7, 对应三组解:

当 $z=5$ 时, $y=4, x=0$, 从 9 个位置中选 5 个放 2, 剩余 4 个位置放 1, 则不同的放法有 $C_9^5 C_4^1 = 126$ 种;

当 $z=6$ 时, $y=2, x=1$, 先从 9 个位置中选 6 个放 2, 再从剩余 3 个位置中选 2 个放 1, 最后 1 个位置放 0, 则不同的放法有 $C_9^6 C_3^2 C_1^1 = 252$ 种;

当 $z=7$ 时, $y=0, x=2$, 从 9 个位置中选 7 个放 2, 剩余 2 个位置放 0, 则不同的放法有 $C_9^7 C_2^2 = 36$ 种,

因此, 由分类加法计数原理可得满足条件的不同数列有 $126 + 252 + 36 = 414$ 个.

7. $2^n - 2 \cdot (-1)^{n-3} (n \geq 3, n \in \mathbf{N})$ 【解析】

圆环分为 n 等份, 对 a_1 有 3 种不同的种法, 对 $a_2, a_3, \dots, a_n$ 都有 2 种不同的种法, 但这样的种法只能保证 a_i

与 $a_{i+1} (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 不同颜色, 但不能保证 a_i 与 a_n 不同颜色. 于是一类是 a_n 与 a_1 不同色的种法, 这是符合要求的种法, 记为 $S(n) (n \geq 3)$ 种. 另一类是 a_n 与 a_1 同色的种法, 这时可以把 a_n 与 a_1 看成一部分,

这样的种法相当于分成 $n-1$ 份时符合要求的种法, 记为 $S(n-1)$, 这两类共有 $3 \times 2^{n-1}$ 种种法, 即 $S(n) + S(n-1) = 3 \times 2^{n-1}$, 即 $S(n) - 2^n = -[S(n-1) - 2^{n-1}]$, 则数列 $\{S(n) - 2^n\} (n \geq 3)$ 是首项为 $S(3) - 2^3$, 公比为 -1 的等比数列, 则 $S(n) - 2^n = [S(3) - 2^3](-1)^{n-3} (n \geq 3)$.

由题意知 $S(3) = 6$, 则 $S(3) - 2^3 = 6 - 8 = -2$, 所以 $S(n) - 2^n = -2 \cdot (-1)^{n-3}$, 所以 $S(n) = 2^n - 2 \cdot (-1)^{n-3} (n \geq 3, n \in \mathbf{N})$.

6.3 二项式定理

6.3.1 二项式定理

刷基础

1. B 【解析】 根据二项展开式的通项可得第 7 项为 $T_7 = C_n^6 1^{n-6} (-x)^6 = C_n^6 x^6$.

2. D 【解析】 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式的通

项 $T_{r+1} = C_4^r (2x)^{4-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r 2^{4-r} C_4^r x^{4-2r}$, 令 $4-2r=2$, 则 $r=1$, 因此 x^2 的系数为 $(-1)^1 2^3 C_4^1 = -32$. 故选 D.

链接教材 本题是教材第 30 页例 2 的变式. $(a+b)^n$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (其中 $0 \leq k \leq n, k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}^*$). 当 b 为负数时, 展开时注意不要丢了负号.

3. A 【解析】 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^9$ 展开式的通项

为 $T_{r+1} = C_9^r \cdot (\sqrt{x})^{9-r} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^r = C_9^r \cdot$

$(-2)^r \cdot x^{\frac{9-r}{2}}, r=0, 1, 2, \dots, 9$,

令 $\frac{9-r}{2} = 0$, 解得 $r=3$,

将 $r=3$ 代入通项得 $C_9^3 \cdot (-2)^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times (-8) = 84 \times (-8) = -672$, 因此展开式的常数项为 -672 . 故选 A.

归纳总结 求展开式中的特定项或项的系数: ①根据所给出的条件 (特定项) 和通项, 建立方程来确定指数 (求解时要注意二项式系数 $C_n^k (k=0, 1, 2, \dots, n)$ 中 n 和 k 的隐含条件, 即 $n \in \mathbf{N}^*, k \in \mathbf{N}$, 且 $n \geq k$); ②根据所求的指数, 再求所求解的项.

4. -4

思路导引 等号左边是 x^4 , 右边和 $(x+1)$ 有关, 且 a_3 是 $(1+x)^3$ 的系数, 则可将 x^4 配凑成和 $(x+1)$ 有关的式子, 即为 $[(x+1)-1]^4$, 将 $(x+1)$ 看成一个整体, 结合二项式定理即可求出 a_3 .

【解析】 由题可知 $f(x) = x^4 = [(x+1)-1]^4 = C_4^0 (x+1)^4 + C_4^1 (x+1)^3 \cdot (-1) + C_4^2 (x+1)^2 \cdot (-1)^2 + C_4^3 (x+1) \cdot (-1)^3 + C_4^4 (-1)^4$, 又 $f(x) = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + a_3(1+x)^3 + a_4(1+x)^4$, 所以 $a_3 = C_4^3 \times (-1) = -4$.

5. 【解】 (1) 因为 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式

中第三项为 $C_n^2 (\sqrt{x})^{n-2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 =$

$$\frac{n(n-1)}{8} x^{\frac{n-3}{2}},$$

则 $\frac{n(n-1)}{8} = 7$, 即 $n^2 - n - 56 = 0$, 解得

$n=8$ 或 $n=-7$ (舍去),

所以 $n=8$.

(2) 因为 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{x})^{8-r} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r = \frac{C_8^r}{2^r} x^{\frac{16-3r}{4}}, r =$$

$0, 1, 2, \dots, 8$,

令 $\frac{16-3r}{4} \in \mathbf{Z}$, 解得 $r=0, 4, 8$,

若 $r=0$, 可得 $T_1 = \frac{C_8^0}{2^0} x^4 = x^4$;

若 $r=4$, 可得 $T_5 = \frac{C_8^4}{2^4} x = \frac{35}{8} x$;

若 $r=8$, 可得 $T_9 = \frac{C_8^8}{2^8} x^{-2} = \frac{1}{256} x^{-2}$.

综上, 展开式中的有理项为 $x^4, \frac{35}{8} x,$

$$\frac{1}{256} x^{-2}.$$

特别注意 注意二项式系数和项的系数不是同一个概念, 二项展开式中各项的二项式系数为 $C_n^k (k=0, 1, 2, \dots, n)$, 项的系数是指该项中除变量外的常数部分, 包含符号等, 但二项式系数与项的系数也有可能相同.

6. C 【解析】 $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式的通项

为 $T_{k+1} = C_5^k (2x)^{5-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_5^k \cdot 2^{5-k} \cdot$

$x^{5-2k} (k=0, 1, \dots, 5)$,

令 $5-2k=1$, 得 $k=2$, 此时 $T_3 = C_5^2 \cdot 2^3 \cdot$

$x = 80x$.

$(\sqrt{x}-1)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot$

$(\sqrt{x})^{5-r} (-1)^r = C_5^r (-1)^r x^{\frac{5-r}{2}} (r=0,$

$1, \dots, 5)$,

令 $\frac{5-r}{2} = 1$, 得 $r=3$, 此时 $T_4 = C_5^3 (-1)^3 x =$

$-10x$,

所以展开式中 x 的系数为 $80-10=70$.

故选 C.

7. D 【解析】 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式的通项

$T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_5^r 2^{5-r} (-1)^r \cdot x^{5-2r}$.

原式中含 x^3 项有两种来源:

① $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 中 x 项与 x^2 相乘;

② $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 中 x^3 项与 2 相乘.

① 令 $5-2r=1$, 得 $r=2$, 此时 T_3 为 $C_5^2 2^{5-2} (-1)^2 \cdot x = 80x$, 与 x^2 相乘后得

到 $80x^3$;

②令 $5-2r=3$, 得 $r=1$, 此时 T_2 为 $C_5^1 2^{5-1}(-1) \cdot x^3 = -80x^3$, 与 2 相乘后得到 $-160x^3$,

所以含 x^3 项的系数为 $80+(-160)=-80$. 故选 D.

8. C 【解析】 $(x^2+m)^4$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r (x^2)^{4-r} m^r = C_4^r m^r x^{8-2r}$ ($r=0, 1, 2, 3, 4$).

$\left(1+\frac{1}{x^6}\right)(x^2+m)^4$ 展开式中的常数项由两部分组成:

第一部分: 第一个括号内取 1, 第二个括号内取常数项, 即令 $8-2r=0$, 得 $r=4$, 这部分系数为 $1 \cdot C_4^4 m^4 = m^4$;

第二部分: 第一个括号内取 $\frac{1}{x^6}$, 第二个括号内取 x^6 项, 令 $8-2r=6$, 得 $r=1$, 这部分系数为 $1 \cdot C_4^1 m^1 = 4m$,

则常数项为 $m^4+4m=24$, 且 $m>0$, 解得 $m=2$. 故选 C.

9. C 【解析】依题意, $(x^2-x+2)^5$ 展开式中含 x^3 的项为 $C_5^1 x^2 \cdot C_4^1 (-x) \cdot C_3^2 2^3 + C_5^3 (-x)^3 \cdot C_2^2 2^2 = -200x^3$, 所以 $a_3 = -200$. 故选 C.

10. 【解】 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = \left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)^4 = \frac{(x-1)^8}{x^4}$. 要求原式的常数项, 等价于求 $(x-1)^8$ 展开式中含 x^4 项的系数. $(x-1)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} (-1)^r$, $r=0, 1, 2, \dots, 8$. 令 $8-r=4$, 得 $r=4$, 因此含 x^4 项的系数为 $C_8^4 \cdot (-1)^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 1 = 70$, 即原展开式中的常数项为 70.

多种解法 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ 可以看作是 4 个 $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 相乘,

常数项可能由下列几种情况得到:

4 个因式中, 1 个取 x , 1 个取 $\frac{1}{x}$, 2 个

取 -2 , 得 $C_4^1 x \cdot C_3^1 \frac{1}{x} \cdot C_2^2 (-2)^2 = 48$;

4 个因式中, 2 个取 x , 2 个取 $\frac{1}{x}$, 得

$C_4^2 x^2 C_2^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 6$;

4 个因式中, 全部取 -2 , 得 $C_4^4 \times (-2)^4 = 16$.

合并同类项, 得 $48+6+16=70$.

所以常数项为 70.

归纳总结 解决二项式问题有三种方法: 方法一, 反复利用二项式定理, 先把三项式中的某两项视为一项, 用二项式定理展开, 再利用二项展开式求解. 方法二, 转化为二项式, 常见的有两种转化形式: 三项式恰好是二项式的平方, 则可转化为二项式定理求解; 三项式可分解因式, 则可转化为两个二项式的积的形式. 方法三, 利用组合知识, 把三项式看成几个项的积, 再分析项的构成, 注意最后应把各个同类项合并. 利用二项式定理求特定项, 注意题型的变化.

刷易错

★易错点 未能正确理解二项展开式中通项的项数致误

11. C 【解析】由二项式定理可得 $\left(x^6 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k (x^6)^{5-k} \left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^k = C_5^k (-1)^k x^{30-\frac{15}{2}k}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5$). 令 $30-\frac{15}{2}k=0$, 得 $k=4$, 所以二项式 $\left(x^6 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的第 $4+1=5$ 项为常数项, 故选 C.

易错警示 公式 $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 中, $C_n^k a^{n-k} b^k$ 是展开式的第 $k+1$ 项, 可记作 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (其中 $0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$).

6.3.2 二项式系数的性质

刷基础

1. B 【解析】因为第 8 项的二项式系数为 C_{2n}^7 , 由二项式系数的对称性知 $C_{2n}^7 = C_{2n}^{2n-7}$, 所以第 $2n-6$ 项的二项式系数与第 8 项的二项式系数相等, 故选 B.

链接教材 本题由教材第 35 页习题 6.3 第 8 题变化得到, 都是利用二项式系数的对称性求解问题.

2. C 【解析】由题意得 $\frac{n}{2}+1=5$, 故 $n=8$, 则 $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r (2x^2)^{8-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_8^r (-1)^r \cdot 2^{8-r} \cdot x^{16-3r}$, $0 \leq r \leq 8$ 且 $r \in \mathbb{N}$, 令 $r+1=6$, 则 $r=5$, 所以展开式中第 6 项的系数为 $C_8^5 (-1)^5 \cdot 2^3 = -448$. 故选 C.

3. D 【解析】根据二项式系数的性质可知, $(x+y)^{2m}$ 的二项式系数的最大值为 C_{2m}^m , 即 $a = C_{2m}^m$, $(x+y)^{2m+1}$ 的二项式系数的最大值为 C_{2m+1}^m 或 C_{2m+1}^{m+1} , 且 $C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1}$, 即 $b = C_{2m+1}^m$.

已知 $7a = 4b$, 即 $7C_{2m}^m = 4C_{2m+1}^m$, 即 $7 \times \frac{(2m)!}{m! m!} = 4 \times \frac{(2m+1)!}{m! (m+1)!}$,

化简得 $7 \times (m+1) = 4 \times (2m+1)$, 解得 $m=3$. 故选 D.

4. 【解】 $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k C_n^k x^{n-\frac{3}{2}k}$, $k \in \mathbb{N}, k \leq n$.

由展开式中的前三项系数成等差数列, 得 $2 \cdot \frac{1}{2} C_n^1 = C_n^0 + \frac{1}{4} C_n^2$, 整理得

$n^2 - 9n + 8 = 0$, 解得 $n=8$ 或 $n=1$. 要使 $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式至少有三项, 则 $n \geq 2$, 所以 n 的值为 8.

避坑: 注意 n 的取值范围, 要保证二项展开式中的项数满足题设要求.

(2) 由 (1) 知 $n=8$, 则展开式中第 5 项的二项式系数最大, 所以二项式系数最大的项为 $T_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 C_8^4 x^2 = \frac{35}{8} x^2$.

(3) 由 (1) 知 $n=8$, 则展开式的通项为 $T_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k C_8^k x^{8-\frac{3}{2}k}$, $k \in \mathbb{N}, k \leq 8$, 当 $k \in \{1, 3, 5, 7\}$ 时, T_{k+1} 为无理项, 则 $T_2 = 4x^{\frac{13}{2}}, T_4 = 7x^{\frac{7}{2}}, T_6 = \frac{7}{4}x^{\frac{1}{2}}, T_8 = \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}$, 所以展开式中所有的无理项的

系数和为 $4+7+\frac{7}{4}+\frac{1}{16} = \frac{205}{16}$.

规律方法 求解二项展开式中二项式系数或系数的最值问题的步骤

第一步, 首先要弄清是求展开式中“二项式系数的最大值”“项的系数的最大值”以及“二项式系数最大项”“系数最大项”中的哪一个.

第二步, 若是求二项式系数的最大值, 则依据 $(a+b)^n$ 中 n 的奇偶及二项式系数的性质求解. 若是求展开式中项的系数的最大值, 设展开式各项的系数分别为 $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$, 且第 k ($k \geq 2$) 项系数最大, 因此在系数均为正值的前提下, 求展开式中项的系数的最大值只需解不等式组 $\begin{cases} A_k \geq A_{k-1}, \\ A_k \geq A_{k+1} \end{cases}$, 即得结果. 求二项式系数

的最大值或系数的最大值只需要写出系数即可,而求二项式系数最大值或系数最大项需要把完整的那一项写出来.

- 5. C** 【解析】因为 $\left(4\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^n$ 的展开式中,二项式系数之和为 64, 所以 $2^n=64$, 解得 $n=6$, 所以 $\left(4\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^n=\left(4\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$, 其展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r \cdot (4\sqrt{x})^{6-r} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^r = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot 4^{6-r} \cdot C_6^r \cdot x^{\frac{6-3r}{2}}$, $r=0,1,2,\dots,6$. 令 $\frac{6-3r}{2}=0$, 得 $r=2$, 所以展开式的常数项为 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4^{6-2} \cdot C_6^2=960$. 故选 C.

- 6. ACD** 【解析】因为 $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的二项展开式共有 8 项, 所以 $n+1=8$, 解得 $n=7$. 对于 A 选项, 各项二项式系数和为 $2^7=128$, A 正确; 对于 B 选项, 展开式通项为 $T_{k+1}=C_7^k \cdot x^{7-k} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_7^k \cdot (-1)^k \cdot x^{7-\frac{3k}{2}}$ ($k=0,1,2,\dots,7$), 令 $7-\frac{3k}{2} \in \mathbf{Z}$ ($k=0,1,2,\dots,7$), 可得 $k \in \{0,2,4,6\}$, 故有理项共有 4 项, B 错误; 对于 C 选项, 令 $7-\frac{3k}{2}=4$, 可得 $k=2$, 故展开式中 x^4 的系数为 $C_7^2 \cdot (-1)^2=21$, C 正确; 对于 D 选项, 展开式中共 8 项, 其中第 4 项和第 5 项的二项式系数最大, 但第 4 项的系数为 $C_7^3 \cdot (-1)^3=-35$, 第 5 项的系数为 $C_7^4 \cdot (-1)^4=35$, 故展开式中第 5 项的系数最大, D 正确. 故选 ACD.

- 7. C** 【解析】因为 $C_n^0-4C_n^1+4^2C_n^2-4^3C_n^3+\dots+(-1)^n4^nC_n^n=729$, 所以 $(1-4)^n=3^6$, 所以 $n=6$, 因此 $C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^n=2^n-C_n^0=2^n-1=2^6-1=63$, 故选 C.

- 8. 【解】**(1) 因为 $(1+m\sqrt{x})^n$ (m 是正实数) 的展开式的二项式系数之和为 256, 所以 $2^n=256$, 解得 $n=8$, 所以二项展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^k m^k x^{\frac{k}{2}}$ ($k=0,1,2,\dots,8$), 则含有 x^2 项的系数为

$$C_8^4 m^4 = 1\ 120,$$

解得 $m=2$ 或 $m=-2$ (舍去), 故 m,n 的值分别为 2, 8.

展开式中偶数项的二项式系数之和为 $C_8^1+C_8^3+C_8^5+C_8^7=8+56+56+8=128$.

(2) 由 (1) 知 $(1+2\sqrt{x})^8$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^k 2^k x^{\frac{k}{2}}$ ($k=0,1,2,\dots,8$), 因为 $(1+2\sqrt{x})^8(1+x)=(1+2\sqrt{x})^8+x(1+2\sqrt{x})^8$, 所以含 x^2 项的系数为 $C_8^4 2^4+C_8^2 2^2=70 \times 16+28 \times 4=1\ 232$.

悟: 提取 $(1+2\sqrt{x})^8$ 中 x^2 的系数, 提取 $x(1+2\sqrt{x})^8$ 中 $x \cdot x$ 的系数

- 9. ABD** 【解析】A 选项, 因为 $(2-x)^{12}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{12}x^{12}$, 所以令 $x=0$ 得 $a_0=2^{12}$, A 正确; B 选项, 令 $x=1$ 得 $(2-1)^{12}=a_0+a_1+a_2+\dots+a_{12}$, 令 $x=-1$ 得 $(2+1)^{12}=a_0-a_1+a_2-\dots+a_{12}$, 将两式相加除以 2 得 $a_0+a_2+a_4+\dots+a_{12}=\frac{1+3^{12}}{2}$, B 正确; C 选项, 二项式 $(2-x)^{12}$ 的展开式共 13 项, 因此二项式系数最大的项为第 7 项, C 错误; D 选项, 令 $x=2$, 则 $a_0+a_1 \times 2+a_2 \times 2^2+a_3 \times 2^3+\dots+a_{12} \times 2^{12}=0$, 所以 $a_1 \times 2+a_2 \times 2^2+a_3 \times 2^3+\dots+a_{12} \times 2^{12}=-a_0=-2^{12}$, 等式两边同时除以 2, 得 $a_1+2^1 \times a_2+2^2 \times a_3+\dots+2^{11} \times a_{12}=-2^{11}$, D 正确. 故选 ABD.

归纳总结 二项展开式中项的系数之和问题求解的两种方法

(1) “赋值法”普遍适用于恒等式, 是一种重要的方法, 对形如 $(ax+b)^n$, $(ax^2+bx+c)^m$ ($a,b,c \in \mathbf{R}$) 的式子求其展开式的各项系数之和, 常用赋值法, 只需令 $x=1$ 即可; 对形如 $(ax+by)^n$ ($a,b \in \mathbf{R}$) 的式子求其展开式各项系数之和, 只需令 $x=y=1$ 即可.

(2) 若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, 则 $f(x)$ 的展开式中各项系数之和为 $f(1)$, 奇数项系数之和为 $a_0+a_2+a_4+\dots=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$, 偶数项系数之和为 $a_1+a_3+a_5+\dots=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$.

- 10. C** 【解析】由二项式定理, 得 $(x+1)^{2\ 026}=\sum_{k=0}^{2\ 026} C_{2\ 026}^k x^{2\ 026-k}$, $k=0,1,$

$$2,\dots,2\ 026,$$

对比系数得 $a_{k+1}=C_{2\ 026}^k$, 即 $a_j=C_{2\ 026}^{j-1}$, $j=1,2,\dots,2\ 027$, 则 $a_2+2a_3+\dots+2\ 025a_{2\ 026}+2\ 026a_{2\ 027}=\sum_{j=2}^{2\ 027} (j-1)a_j=\sum_{j=1}^{2\ 026} jC_{2\ 026}^j$, 又 $\sum_{i=1}^n iC_n^i=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n$, 二项式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\dots+C_n^nx^n$, 等式两边同时求导, 得 $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\dots+nC_n^nx^{n-1}$, 令 $x=1$, 得 $n \cdot 2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n$, 因此 $\sum_{i=1}^n iC_n^i=2^{n-1}n$, 得 $\sum_{i=1}^{2\ 026} iC_{2\ 026}^i=2\ 026 \times 2^{2\ 025}$. 故选 C.

- 11. D** 【解析】 $(x+y)^7$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r x^{7-r} y^r$, $r=0,1,2,3,4,5,6,7$, 当与 $\frac{y}{x}$ 配对时, $r=1$, 故 x^5y^2 的系数为 $C_7^1=7$; 当与 $-a$ 配对时, $r=2$, 故 x^5y^2 的系数为 $C_7^2 \cdot (-a)=-21a$, 所以 $7-21a=28$, 解得 $a=-1$. 令 $x=y=1$, 则所求展开式的各项系数之和为 2^8 . 故选 D.

- 12. 【解】**(1) 由题意, 得 $2^n=64$, $\therefore n=6$. (2) 二项式 $(1+\sqrt{2}x)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k \cdot (\sqrt{2}x)^k=C_6^k 2^{\frac{k}{2}} x^k$ ($k=0,1,2,\dots,6$), 则 $a=C_6^0+2C_6^2+4C_6^4+8C_6^6=99$, $b=C_6^1+2C_6^3+4C_6^5=70$.

多种解法 (2) 令 $x=1$, 则 $(1+\sqrt{2})^6=a+\sqrt{2}b$. $\therefore (1+\sqrt{2})^6=[(1+\sqrt{2})^2]^3=(3+2\sqrt{2})^3=99+70\sqrt{2}$, $\therefore a=99, b=70$.

- 13. 【解】**(1) 令 $x=1$, 得 $a_0+a_1+a_2+\dots+a_{2\ 027}=(-2)^{2\ 027}=-2^{2\ 027}$, ① 令 $x=-1$, 得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+a_{2\ 026}-a_{2\ 027}=4^{2\ 027}$, ② 由 ①-②, 得 $2(a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2\ 027})=-2^{2\ 027}-4^{2\ 027}$, $\therefore a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2\ 027}=-2^{2\ 026}-2 \times 4^{2\ 026}$. (2) $\therefore (1-3x)^{2\ 027}$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{2\ 027}^r (-3x)^r=(-1)^r \cdot C_{2\ 027}^r \cdot (3x)^r$, $r=0,1,\dots,2\ 027$, $\therefore r=2k+1$ 时, $a_{2k+1}<0$ ($k \in \mathbf{N}$), $r=2k$ 时, $a_{2k}>0$ ($k \in \mathbf{N}$), $\therefore |a_0|+|a_1|+|a_2|+\dots+|a_{2\ 027}|=a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+a_{2\ 026}-a_{2\ 027}$,

由(1)知, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2026} - a_{2027} = 4^{2027}$,

$$\therefore |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{2027}| = 4^{2027}.$$

$$(3) \because (1-3x)^{2027} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2027}x^{2027} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\therefore \text{两边分别求导, 得 } -6\,081(1-3x)^{2026} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + 2\,027a_{2027}x^{2026} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

点悟: 运用导数使 a_n 前出现对应的系数 n

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2\,027a_{2027} = -6\,081 \times (-2)^{2026} = -6\,081 \times 2^{2026}.$$

14. AB 【解析】A 选项, 第 6 行的第 7 个数为 1, 第 7 行的第 7 个数为 7, 第 8 行的第 7 个数为 28, 它们之和为 $1+7+28=36$, 第 9 行的第 8 个数是 $C_9^7=36$, **A 正确**;

B 选项, 由杨辉三角可知, 第 0 行所有数的和为 $1=2^0$, 第 1 行所有数的和为 $1+1=2^1$, 第 2 行所有数的和为 $1+2+1=2^2$, 第 3 行所有数的和为 $1+3+3+1=2^3$,

以此类推, 第 10 行所有数的和为 2^{10} , **B 正确**;

C 选项, 第 16 行的数依次为 $C_{16}^0, C_{16}^1, C_{16}^2, \dots, C_{16}^{16}$,

从杨辉三角的前几行的奇偶性可知, 第 0 行 1 个奇数; 第 1 行 2 个奇数; 第 2 行 2 个奇数; 第 3 行 4 个奇数; 第 4 行 2 个奇数; 第 5 行 4 个奇数; 第 6 行 4 个奇数; 第 7 行 8 个奇数; 第 8 行 2 个奇数……

可见当 $n=2^m, m \in \mathbb{N}$ 时, 第 n 行只有首尾两个数是奇数, 其余均为偶数, 故第 16 行的数中只有 C_{16}^0, C_{16}^{16} 两个奇数, 其余都为偶数, 即共有 15 个偶数, **C 错误**;

D 选项, 第 34 行的数是二项式 $(a+b)^{34}$ 的展开式的二项式系数, 所以第 15 个数与第 16 个数之比为 $C_{34}^{14} : C_{34}^{15} = 3 : 4$, **D 错误**.

故选 AB.

15. BD 【解析】选项 A, 因为 $C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+1}$,

$$\text{所以 } C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_9^2 = C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_9^2 - 1 = C_4^3 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_9^2 - 1 = \cdots = C_{10}^3 - 1 = 119, \text{ 故 A 错误};$$

选项 B, 易知第 2 023 行的第 1 012 个数和第 1 013 个数分别是 $C_{2\,023}^{1\,011}, C_{2\,023}^{1\,012}$,

由组合数的性质可知 $C_{2\,023}^{1\,011} = C_{2\,023}^{1\,012}$, 则

两数同为第 2 023 行中最大的数, 故

B 正确;

选项 C, 由题易知 $a_i = C_n^{i-1}$,

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} \cdot C_n^{i-1} = 2^0 C_n^0 + 2^1 C_n^1 + \cdots + 2^n C_n^n = (1+2)^n = 3^n \neq 3^{n+1}, \text{ 故 C 错误};$$

选项 D, 由题易知, 第 n 行所有数的平方的和为 $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$, 第 $2n$ 行的中间一项的数为 C_{2n}^n ,

$$\text{构造等式 } (1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}, \text{ 在等式左边 } x^n \text{ 的系数为 } C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} C_n^1 + C_n^n C_n^0 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2,$$

$$\text{等式右边 } x^n \text{ 的系数为 } C_{2n}^n, \text{ 故 } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n, \text{ 故 D 正确. 故选 BD.}$$

16. C 【解析】因为 $3^{2\,025} = 27^{675} = (26+1)^{675} = C_{675}^0 26^{675} \times 1^0 + C_{675}^1 26^{674} \times 1^1 + C_{675}^2 26^{673} \times 1^2 + \cdots + C_{675}^{674} 26^1 \times 1^{674} + C_{675}^{675} 26^0 \times 1^{675} = C_{675}^0 26^{675} + C_{675}^1 26^{674} + C_{675}^2 26^{673} + \cdots + C_{675}^{674} 26 + 1$, 所以 $3^{2\,025}$ 除以 13 所得余数为 1, 则 $m=1$.

$$\text{因为 } 3^{2\,025} = 27^{675} = (28-1)^{675} = C_{675}^0 28^{675} \times (-1)^0 + C_{675}^1 28^{674} \times (-1)^1 + C_{675}^2 28^{673} \times (-1)^2 + \cdots + C_{675}^{674} 28 \times (-1)^{674} + C_{675}^{675} 28^0 \times (-1)^{675} = C_{675}^0 28^{675} - C_{675}^1 28^{674} + C_{675}^2 28^{673} - \cdots + C_{675}^{674} 28 - 1,$$

所以 $3^{2\,025}$ 除以 14 所得余数为 13, 则

$$n=13, \text{ 因此 } \frac{n}{m} = 13. \text{ 故选 C.}$$

17. A 【解析】因为 $0.99^{10} = (1-0.01)^{10} = 1 - C_{10}^1 \cdot 0.01 + C_{10}^2 \cdot 0.01^2 - C_{10}^3 \cdot 0.01^3 + \cdots - C_{10}^9 \cdot 0.01^9 + 0.01^{10} = 1 - 0.1 + 0.0045 - 0.00012 + \cdots - 10 \times 0.01^9 + 0.01^{10} = 0.9043 \dots$, 因此 0.99^{10} 的小数点后第三位数字为 4, 故选 A.

18. B 【解析】由题意知 $m = 3 \times 8^0 + 3 \times 8^1 + 3 \times 8^2 + \cdots + 3 \times 8^{19} = 3 \times \sum_{k=0}^{19} 8^k$,

设 $S = \sum_{k=0}^{19} 8^k$, 因为 $8^k (k=0, 1, \dots, 19)$ 的个位数字分别为 1, 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, $\dots, 8, 4, 2$,

所以 $8^k (k=0, 1, \dots, 19)$ 的个位数字之和为 $1+4 \times (8+4+2+6) + (8+4+2) = 95$,

$$\text{所以 } S = \sum_{k=0}^{19} 8^k \text{ 的个位数字为 } 5,$$

$$\text{所以 } m = 3 \times \sum_{k=0}^{19} 8^k \text{ 的个位数字为 } 5.$$

故选 B.

多种解法 由题意知 $m = 3 \times 8^0 + 3 \times$

$$8^1 + 3 \times 8^2 + \cdots + 3 \times 8^{19} = 3 \times \frac{1-8^{20}}{1-8} = \frac{3 \times (8^{20}-1)}{7} = \frac{(10-7) \times (8^{20}-1)}{7} = \frac{10 \times (8^{20}-1)}{7} - (8^{20}-1),$$

又由二项式定理知 $8^{20} - 1 = (7+1)^{20} - 1 = C_{20}^0 7^{20} + C_{20}^1 7^{19} + \cdots + C_{20}^{19} 7 + C_{20}^{20} - 1 = C_{20}^0 7^{20} + C_{20}^1 7^{19} + \cdots + C_{20}^{19} 7$ 是 7 的倍数,

所以 $\frac{10 \times (8^{20}-1)}{7}$ 是 10 的倍数.

$$\text{又由二项式定理知 } 8^{20} - 1 = (10-2)^{20} - 1 = C_{20}^0 10^{20} + C_{20}^1 10^{19} \times (-2) + \cdots + C_{20}^{19} 10 \times (-2)^{19} + C_{20}^{20} (-2)^{20} - 1,$$

所以 $8^{20} - 1$ 的个位数字与 $2^{20} - 1$ 的个位数字相同,

$$\text{同理, } 2^{20} - 1 = 4 \times 2^{18} - 1 = 4 \times (10-2)^6 - 1 = 4 C_6^0 10^6 + 4 C_6^1 10^5 \times (-2) + 4 C_6^2 10^4 \times (-2)^2 + \cdots + 4 C_6^6 (-2)^6 - 1,$$

所以 $2^{20} - 1$ 的个位数字与 $4 \times 2^6 - 1 = 255$ 的个位数字相同,

可得 $8^{20} - 1$ 的个位数字为 5.

$$m = \frac{10 \times (8^{20}-1)}{7} - (8^{20} - 1), \text{ 且}$$

$$\frac{10 \times (8^{20}-1)}{7} \text{ 是 10 的倍数, 其个位数字为 0, 所以 } m \text{ 的个位数字与 } 0-5,$$

即 $10-5$ 的个位数字相同, 即为 5.

综上, 十进制数 m 的个位数字为 5.

19. (1) 【解】 $\left(2x^3 - \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$ 展开式的通项

$$\text{为 } T_{k+1} = C_{10}^k (2x^3)^{10-k} \left(\frac{-1}{2x^3}\right)^k =$$

$$C_{10}^k 2^{10-2k} (-1)^k x^{30-6k},$$

$$\text{令 } 30-6k=0, \text{ 得 } k=5,$$

$$\text{故常数项为 } C_{10}^5 \times (-1)^5 = -252.$$

$$(2) \text{ 【证明】 因为 } 55^{55} = (56-1)^{55} = 56^{55} + C_{55}^{55} 56^{54} (-1)^1 + C_{55}^{54} 56^{53} (-1)^2 + \cdots + C_{55}^{54} 56^1 (-1)^{54} + (-1)^{55},$$

$$\text{所以 } 55^{55} + 9 = 56^{55} + C_{55}^{55} 56^{54} (-1)^1 + C_{55}^{54} 56^{53} (-1)^2 + \cdots + C_{55}^{54} 56^1 (-1)^{54} + 8.$$

$$\text{又 } 56^{55}, C_{55}^{55} 56^{54} (-1)^1, C_{55}^{54} 56^{53} (-1)^2, \dots, C_{55}^{54} 56^1 (-1)^{54}, 8 \text{ 均能被 } 8 \text{ 整除,}$$

故 $55^{55} + 9$ 能被 8 整除.

链接教材 本题是教材第 35 页习题 6.3 第 9 题的变式, 考查利用二项式定理解决整除问题的基本思路.

要证明一个数能被另一个数整除, 只要证明这个数按二项式定理展开后的各项均能被另一个数整除即可. 因

此,一般将被除数化为含有与除数相关的二项式,然后再展开,此时常用“配凑法”“消去法”,再结合有关整除知识来求解.

刷易错

★易错点1 混淆展开式中的奇偶次项与奇偶数项致误

20. 255 【解析】设 $(2x-1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 且奇次项的系数和为 A , 偶次项的系数和为 B , 则 $A = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$, $B = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$. 由已知得 $B - A = 3^8$. 令 $x = -1$, 得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n(-1)^n = (-3)^n$, 即 $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots) = (-3)^n$, 即 $B - A = (-3)^n$, 所以 $(-3)^n = 3^8 = (-3)^8$, 所以 $n = 8$. 所以 $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - C_n^0 = 2^8 - 1 = 255$.

易错警示 (1) 求解这类题易犯下列错误: ①误把奇次项、偶次项看成是奇数项、偶数项; ②错误地认为 $-3^8 = (-3)^8$; ③把 $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n$ 看成二项展开式中各项二项式系数和, 忽略了 C_n^0 .

(2) 解答此类问题应掌握 $(a+b)^n$ 的展开式中各项的二项式系数的和为 2^n , 且奇数项二项式系数和与偶数项二项式系数和都等于 2^{n-1} .

★易错点2 混淆二项式系数与展开式中项的系数致误

21. C 【解析】在 $\left(x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$ 中, 令 $x = 1$ 得 $(1+3)^n = 4^n$, 即展开式中各项系数和为 4^n . 又展开式的二项式系数和为 2^n , 由题意得 $\frac{4^n}{2^n} = 2^n = 32$, 解得 $n = 5$. 故 $\left(x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k x^{5-k} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^k = 3^k C_5^k x^{5-\frac{3k}{2}}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). 令 $5 - \frac{3k}{2} = 2$, 得 $k = 2$, 则 $T_3 = 3^2 \cdot C_5^2 \cdot x^2 = 90x^2$, 所以 x^2 的系数为 90. 故选 C.

易错警示 混淆二项式系数与项的系数而致误

$(a+bx)^n$ 的展开式中, 二项式系数是指 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$, 它们是组合数, 只与各项的序号有关, 而与 a, b 的值无关; 而项的系数是指该项中除变量外的常数部分, 它不仅与各项

的序号有关, 而且也与 a, b 的值有关. 如第 $k+1$ 项的二项式系数是 C_n^k , 而该项的系数是 $C_n^k a^{n-k} b^k$. 当然, 在某些特殊的二项展开式, 如 $(1+x)^n$ 中, 各项的系数与二项式系数是相等的.

22. 【解】 (1) 二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中, 所有项的二项式系数之和为 2^n , 由题意得 $2^n = 256$, 解得 $n = 8$.

(2) 由 $n = 8$ 得二项式为 $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^8$, 其展开式的通项为 $T_{k+1} = C_8^k \cdot (\sqrt{x})^{8-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = C_8^k \cdot 2^k \cdot x^{\frac{8-3k}{2}}$,

令 $\frac{8-3k}{2} = 1$, 解得 $k = 2$,

所以展开式中含 x 的项的系数为 $C_8^2 \cdot 2^2 = 28 \times 4 = 112$.

(3) 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_8^k \cdot 2^k \cdot x^{\frac{8-3k}{2}}$, 假设第 $k+1$ 项的系数最大, 则 $\begin{cases} 2^k C_8^k \geq 2^{k-1} C_8^{k-1}, \\ 2^k C_8^k \geq 2^{k+1} C_8^{k+1}, \end{cases}$ 解得 $5 \leq k \leq 6$, 所以 $k = 5$ 或 6 ,

即系数最大项为 $T_6 = 1\,792x^{\frac{7}{2}}$ 和 $T_7 = 1\,792x^{-5}$.

第 6.3 节综合训练

刷能力

1. C 【解析】 $(1+x)^n$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+$) 的展开式通项为 $T_{k+1} = C_n^k \cdot x^k$ ($0 \leq k \leq n, k \in \mathbf{N}$),

故 $(1+x)^n$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+$) 的展开式中 x^2 的系数为 C_n^2 ,

所以 $(1+x)^4 + (1+x)^5 + \cdots + (1+x)^9$ 的展开式中 x^2 的系数是 $C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + C_7^2 + C_8^2 + C_9^2 = 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 = 116$. 故选 C.

2. D 【解析】由二项式定理, 得 $(x-y)^5 = [(-y) + x]^5 = \sum_{i=0}^5 C_5^i (-y)^{5-i} x^i = \sum_{i=0}^5 (-1)^{5-i} C_5^i x^i y^{5-i}$, 所以 $a_{i+1} = C_5^i (-1)^{5-i}$.

$\{a_n\}$ 的前 6 项依次为 $-1, 5, -10, 10, -5, 1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和为 $-1 + 5 - 10 + 10 - 5 = -1$. 故选 D.

3. B 【解析】令 $x = 1$, 得 $(2+\sqrt{3})^4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$,

令 $x = -1$, 得 $(-2+\sqrt{3})^4 = a_0 - a_1 + a_2 -$

$a_3 + a_4$,

所以 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2 = (a_0 + a_2 + a_4 + a_1 + a_3)(a_0 + a_2 + a_4 - a_1 - a_3) = (2+\sqrt{3})^4(-2+\sqrt{3})^4 = [(2+\sqrt{3})(-2+\sqrt{3})]^4 = (-1)^4 = 1$. 故选 B.

4. ABD 【解析】对 A: 由已知, $C_n^4 = C_n^6$, 所以 $n = 4 + 6 = 10$, 故 A 正确.

对 B: $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 即 $\left(mx^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, 其展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k (mx^2)^{10-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{10}^k m^{10-k} x^{20-\frac{5k}{2}}$, $0 \leq k \leq 10, k \in \mathbf{N}$, 令 $20 - \frac{5k}{2} = 15$, 得 $k = 2$, 因此 x^{15} 的

系数为 $C_{10}^2 \cdot m^8 = 45m^8$, 故 B 正确.

对 C: 因为展开式中各项系数的和为 1 024, 所以令 $x = 1$, 得 $(m+1)^{10} = 1\,024 \Rightarrow m = 1$ 或 $m = -3$.

因为 $m > 0$, 所以 $m = 1$.

所以第 5 项的系数为 C_{10}^4 , 第 6 项的系数为 C_{10}^5 , 因为 $C_{10}^4 < C_{10}^5$, 即第 5 项的系数小于第 6 项的系数, 因此第 5 项的系数不是最大, 故 C 错误.

对 D: 展开式中奇数项的二项式系数和为 $\frac{1}{2} \times 2^{10} = 2^9 = 512$, 故 D 正确. 故选 ABD.

5. BCD 【解析】选项 A: 令 $x = 0$, 代入等式得 $a_0 = (1-6 \times 0)^{2\,026} = 1 \neq 0$, 故 A 错误.

选项 B: 令 $x = \frac{1}{6}$, 代入等式得 $\left(1-6 \times \frac{1}{6}\right)^{2\,026} = a_0 + a_1 \times \frac{1}{6} + a_2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + a_{2\,026} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{2\,026} = 0$,

移项得 $\frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{6^2} + \frac{a_3}{6^3} + \cdots + \frac{a_{2\,026}}{6^{2\,026}} = -a_0 = -1$, 故 B 正确.

选项 C: 因为 $(1-6x)^{2\,026}$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{2\,026}^r (-6x)^r = (-6)^r C_{2\,026}^r x^r$, $0 \leq r \leq 2\,026, r \in \mathbf{N}$,

依题意, $a_r = (-6)^r C_{2\,026}^r$, 则当 r 为奇数时, $|a_r| = -a_r$, 当 r 为偶数时, $|a_r| = a_r$.

令 $x = -1$ 得, $(1+6)^{2\,026} = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{2\,026} = \sum_{r=0}^{2\,026} |a_r| = 7^{2\,026}$, 故 C 正确.

选项 D: 令 $x = 1$ 得, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2\,026} = (1-6)^{2\,026} = 5^{2\,026}$,

故 $2(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2\,026}) = 2 \times 5^{2\,026} = 2 \times 5^4 \times 5^{2\,022} = 1\,250 \times 5^{2\,022}$, 能被 1 250 整除, 故 D 正确.

故选 BCD.

6. $-\frac{4}{9}$ 【解析】由“广义杨辉三角”可得 $(x^2+x+1)^5 = x^{10} + 5x^9 + 15x^8 + 30x^7 + 45x^6 + 51x^5 + 45x^4 + 30x^3 + 15x^2 + 5x + 1$, 因为 $(1+bx)(x^2+x+1)^5$ 的展开式中, x^7 的项为 $30x^7 \cdot 1 + 45x^6 \cdot bx = (30 + 45b)x^7$, 所以 $30 + 45b = 10$, 即 $45b = -20$, 解得 $b = -\frac{4}{9}$.

7. 思路导引 (2) 由 $f(98) = (100-1)^n - 1$, 写出 $(100-1)^n - 1$ 展开式, 即可分析 $C_n^{n-1}100(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n - 1$ 要能被 1 000 整除, 再分 n 为偶数、奇数讨论, 确定 n 的最小值; (3) 写出 $(1+x)^n$ 展开式的通项, 即可得到 $2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$, 根据组合数公式整理得到 $(2k-n)^2 = n+2$, 则 $n+2$ 为完全平方数, 即可确定 n 的值, 同时得到相应的 k .

【解】(1) 因为 $f(x) = C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \cdots + C_n^nx^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \cdots + C_n^nx^n - 1 = (1+x)^n - 1, n \in \mathbf{N}^*$, 所以当 $n=8$ 时, $f(x) = (1+x)^8 - 1$, 所以 $f(1) = (1+1)^8 - 1 = 255$.

(2) 因为 $f(x) = (1+x)^n - 1, n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $f(98) = (1+98)^n - 1 = (100-1)^n - 1 = C_n^0100^n + C_n^1100^{n-1}(-1)^1 + C_n^2100^{n-2}(-1)^2 + \cdots + C_n^{n-2}100^2(-1)^{n-2} + C_n^{n-1}100(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n - 1$

又 $f(98) = (100-1)^n - 1$ 能被 1 000 整除, 所以 $n \geq 4$,

又 $C_n^0100^n - C_n^1100^{n-1} + C_n^2100^{n-2} - \cdots + C_n^{n-2}100^2(-1)^{n-2}$ 能被 1 000 整除,

所以 $C_n^{n-1}100(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n - 1$ 要能被 1 000 整除,

当 n 为偶数时, $C_n^{n-1}100(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n - 1 = -100n$, 此时 n 的最小值

为 10;

当 n 为奇数时, $C_n^{n-1}100(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n - 1 = 100n - 2$ 不可能被 1 000 整除, 所以不存在 n 符合题意.

综上所述, n 的最小值为 10.

(3) 因为 $(1+x)^n$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_n^r x^r (0 \leq r \leq n \text{ 且 } r \in \mathbf{N})$,

所以 x^{k-1}, x^k, x^{k+1} 的项的系数分别为 $C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}$,

因为 x^{k-1}, x^k, x^{k+1} 的项的系数依次成等差数列,

所以 $2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$, 整理可得 $4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0$,

即 $(2k-n)^2 = n+2$, 所以 $n+2$ 为完全平方数,

又 $n \in (20, 30)$, 且 $21+2 < 5^2 < 29+2 < 6^2$,

所以 n 的值为 $25-2=23$, 此时 $(2k-23)^2 = 25$, 则 $2k-23=5$ 或 $2k-23=-5$, 解得 $k=14$ 或 $k=9$,

所以当 $n=23$ 时, $f(x) = (1+x)^{23} - 1$, 其中 x^{13}, x^{14}, x^{15} 的项的系数分别为 $C_{23}^{13}, C_{23}^{14}, C_{23}^{15}$, 成等差数列,

x^8, x^9, x^{10} 的项的系数分别为 $C_{23}^8, C_{23}^9, C_{23}^{10}$, 成等差数列.

综上可得 $n=23, k=14$ 或 $k=9$.

刷素养

8. C 【解析】利用二项式定理有

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^5 = a^5 + 5a^4 \cdot \frac{1}{a} + 10a^3 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 10a^2 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3 + 5a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^4 + \frac{1}{a^5} = \left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) + 5\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) + 10\left(a + \frac{1}{a}\right), \textcircled{1}$$

$$\text{又 } a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \frac{1}{a} \cdot$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) = 18 \text{ 且 } a + \frac{1}{a} = 3,$$

$$\text{代入 } \textcircled{1} \text{ 式得 } 3^5 = 243 = \left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) + 5 \times$$

$$18 + 10 \times 3,$$

$$\therefore a^5 + \frac{1}{a^5} = 243 - 120 = 123. \text{ 故选 C.}$$

第六章素养检测

故选 C.

2. C 【解析】因为二项式系数最大的项是第 3 项和第 4 项, 所以展开式共 6 项, 所以 $n=5$, 所以二项式 $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$

9. $2^4 \cdot 4^{49} + 2^2 \cdot 2^{24}$ 【解析】由题设, 每位数字取自集合 $\{2, 4, 6, 8\}$, 因此每位数字有 4 种选择,

按 2 025 位数中含有 2 的个数分类求解如下:

①当含有 0 个 2 时: 数字 2 的填法有 $\rightarrow$ 避坑: 0 个 2 的 2 025 位数存在, 不能遗漏含 0 个 2 的情况

$C_{2\ 025}^0$ 种, 则每一位都从 4, 6, 8 中选一个数字填入有 3 种填法, 2 025 位有 $3^{2\ 025}$ 种不同填法, 共有 $C_{2\ 025}^0 3^{2\ 025}$ 种不同填法;

②当含有 1 个 2 时: 数字 2 的填法有 $C_{2\ 025}^1$ 种, 剩下的每一位都从 4, 6, 8 中选一个数字填入有 3 种填法, 2 024 位有 $3^{2\ 024}$ 种填法, 共有 $C_{2\ 025}^1 3^{2\ 024}$ 种不同填法;

③当含有 2 个 2 时: 数字 2 的填法有 $C_{2\ 025}^2$ 种, 剩下的每一位都从 4, 6, 8 中选一个数字填入有 3 种填法, 2 023 位有 $3^{2\ 023}$ 种填法, 共有 $C_{2\ 025}^2 3^{2\ 023}$ 种不同填法;

④当含有 i 个 2 时: 数字 2 的填法有 $C_{2\ 025}^i$ 种, 剩下的每一位都从 4, 6, 8 中选一个数字填入有 3 种填法, (2 025 - i) 位有 $3^{2\ 025-i}$ 种填法, 共有 $C_{2\ 025}^i 3^{2\ 025-i}$ 种不同填法 (其中 $i=3, 4, 5, \dots, 2\ 025$).

所以由分类加法计数原理, 得满足各位数字由 2, 4, 6, 8 组成的 2 025 位数的总个数是 $C_{2\ 025}^0 3^{2\ 025} + C_{2\ 025}^1 3^{2\ 024} + \cdots + C_{2\ 025}^i 3^{2\ 025-i} + \cdots + C_{2\ 025}^{2\ 025} 3^0 = (3+1)^{2\ 025} \textcircled{1}$.

$$\text{又 } C_{2\ 025}^0 3^{2\ 025} - C_{2\ 025}^1 3^{2\ 024} + \cdots + (-1)^i C_{2\ 025}^i 3^{2\ 025-i} + \cdots - C_{2\ 025}^{2\ 025} 3^0 = (3-1)^{2\ 025} \textcircled{2},$$

由①+②得, 满足各位数字由 2, 4, 6, 8 组成, 且含偶数个 2 的 2 025 位数的总个数为 $C_{2\ 025}^0 3^{2\ 025} + C_{2\ 025}^2 3^{2\ 023} + \cdots + C_{2\ 025}^{2\ 022} 3^3 +$

$$C_{2\ 025}^{2\ 024} 3^1 = \frac{(3+1)^{2\ 025} + (3-1)^{2\ 025}}{2} = 2^4 \cdot 4^{49} + 2^2 \cdot 2^{24}.$$

所以满足各位数字由 2, 4, 6, 8 组成, 且含偶数个 2 的 2 025 位数有 $2^4 \cdot 4^{49} + 2^2 \cdot 2^{24}$ 个.

刷速度

1. C 【解析】从 5 天中选 2 天, 共有 $C_5^2 = 10$ 种选法. 而周一和周二同时被选中的选法只有 1 种, 因此满足条件的不同的选择方案有 $10-1=9$ (种).

展开式的第 4 项为 $C_5^3 (x^2)^2 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^3 = -80x$, 系数为 -80. 故选 C.

3. C 【解析】现有 11 个优秀团员的名额要分配给 8 个班级, 要求每班至少

$$\left(\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r+1}\right) = \frac{n!}{r!(n-r-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-r)(r+1)} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} = C_{n+1}^{r+1},$$

所以当 $k \geq 2$ 且 $k \in \mathbf{N}^*$ 时, 三角形数阵前 2 024 行中第 k 斜列各项之和为 $C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \cdots + C_{2\,023}^{k-1} = C_k^k + C_{k+1}^{k-1} + C_{k+2}^{k-1} + \cdots + C_{2\,023}^{k-1} = C_{2\,024}^k$,

当 $k=1$ 时, 三角形数阵前 2 024 行中第 1 斜列各项之和为 $2\,024 = C_{2\,024}^1$, 所以该三角形数阵前 2 024 行中第 k 斜列各项之和为 $C_{2\,024}^k$, **D 错误**. 故选 ABC.

12. 260 【解析】①灯区有 5 种颜色可选, ②灯区不能与①灯区同色, 有 4 种颜色可选,

若③灯区与①灯区同色, 则只有 1 种颜色可选, 此时④灯区不能与①③灯区同色, 有 4 种颜色可选;

若③灯区与①灯区不同色, 也不能与②灯区同色, 则有 3 种颜色可选, 此时④灯区不能与①③灯区同色, 有 3 种颜色可选,

所以该舞台灯区共有 $5 \times 4 \times (1 \times 4 + 3 \times 3) = 260$ (种) 不同的颜色搭配方案.

13. 120

思路导引 将位置从左到右依次按 1 到 7 编号, 先将队长甲固定在 4 号位, 再考虑乙和内相邻的排法种数, 接下来分情况讨论小朋友丁不能站在边上的情况, 最后算出总的符合条件的排法种数.

【解析】 将位置从左到右依次按 1 到 7 编号, 其中队长甲必须站在正中间的 4 号位置,

因为好友乙和丙必须相邻, 所以可能的相邻位置组为 (1, 2), (2, 3), (5, 6), (6, 7).

乙、丙内部有 $A_2^2 = 2 \times 1 = 2$ (种) 排法, 当乙、丙在 (1, 2) 的位置上时, 剩余的位置为 3, 5, 6, 7,

因为小朋友丁不能站在边上,

所以丁可选 3, 5, 6 中的一个位置, 剩余三个位置排其余三人, 有 $A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (种) 排法,

则排法有 $2 \times 3 \times 6 = 36$ (种).

当乙、丙在 (6, 7) 的位置上时, 同理也有 36 种排法.

当乙、丙在 (5, 6) 的位置上时, 剩余的位置为 1, 2, 3, 7,

因为小朋友丁不能站在边上,

所以丁可选 2, 3 中的一个位置, 剩余三个位置排其余三人, 有 $A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (种) 排法,

则排法有 $2 \times 2 \times 6 = 24$ (种).

当乙、丙在 (2, 3) 的位置上时, 同理也有 24 种排法.

综上, 符合条件的排法共有 $36 + 36 + 24 + 24 = 120$ (种).

14. 249 【解析】由题意可知 $9^{2\,025} = (10 - 1)^{2\,025}$, 则 $(-1+10)^{2\,025} = \sum_{k=0}^{2\,025} C_{2\,025}^k \cdot (-1)^{2\,025-k} 10^k$,

当 $k \geq 3$ 时, $C_{2\,025}^k (-1)^{2\,025-k} 10^k$ 必为 10^3 的倍数,

所以只需要考虑 $k=0, 1, 2$ 的情况,

当 $k=2$ 时, $-C_{2\,025}^2 \times 10^2 = -\frac{2\,025 \times 2\,024}{2} \times$

$100 = -(2\,025 \times 1\,012) \times 100$,

因为 $2\,025 \times 1\,012$ 的末位数为 0,

所以 $-C_{2\,025}^2 \times 10^2 = -2\,025 \times 1\,012 \times 10^2$ 的后三位上的数字均为 0,

不会对结果的百位、十位、个位产生影响,

故只需考虑 $k=0, 1$ 的情况.

当 $k=0$ 时, $C_{2\,025}^0 \times (-1)^{2\,025} \times 10^0 = -1$;

当 $k=1$ 时, $C_{2\,025}^1 \times (-1)^{2\,024} \times 10^1 = 20\,250$,

所以 $20\,250 - 1 = 20\,249$, 所求后三位数为 249.

15. 【解】 (1) 由题设 $2^n = 64$, 可得 $n=6$.

(2) 由 (1) 得 $n=6$, 则 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ 展开

式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (x^2)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r =$

$C_6^r x^{12-3r}, r=0, 1, \cdots, 6$,

令 $12-3r=0$, 则 $r=4$, 则常数项 $T_5 = C_6^4 = 15$.

(3) 展开式的中间项是第 4 项, 即 $r=3$,

点拨: 当 $n=6$ 时, 二项展开式有 $n+1=7$ 项, 中间项为第 4 项

所以 $T_4 = C_6^3 x^3 = 20x^3$.

链接教材 本题是教材第 34 页习

题 6.3 第 5 题的变式与延伸. 在求二项展开式的中间项时, 需要注意二项展开式的项数, 若展开式共有 $2n+1$ 项, 则中间项为第 $n+1$ 项, 若展开式共有 $2n$ 项, 则中间两项为第 n 项、第 $n+1$ 项.

16. 【解】 (1) 先排 5 名男生, 有 A_5^5 种方法, 然后在 5 名男生形成的 6 个间隙

中任取 3 个排 3 名女生, 有 A_6^3 种方法,

所以排成一排, 女生互不相邻的排法种数是 $A_5^5 A_6^3 = 14\,400$.

(2) 先排 5 名男生, 有 A_5^5 种方法,

再从 3 名女生中任取 2 名作为一个整体与另一名女生插入 5 名男生形成的 6 个间隙中的 2 个, 有 $C_3^2 A_2^2 A_6^2$ 种方法,

所以排成一排, 恰有两名女生相邻的排法种数是 $A_5^5 C_3^2 A_2^2 A_6^2 = 21\,600$.

(3) 8 人排成两排, 每排 4 人, 相当于 8 人排成 4 列, 每列 2 人,

第一步: 从 8 人中任取 2 人, 按矮的在前, 高的在后, 排第 1 列, 有 C_8^2 种排法;

第二步: 从余下 6 人中任取 2 人, 按矮的在前, 高的在后, 排第 2 列, 有 C_6^2 种排法;

第三步: 从余下 4 人中任取 2 人, 按矮的在前, 高的在后, 排第 3 列, 有 C_4^2 种排法;

第四步: 最后 2 人, 按矮的在前, 高的在后, 排第 4 列, 有 C_2^2 种排法.

综上, 由分步乘法计数原理得不同排法种数是 $C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 28 \times 15 \times 6 \times 1 = 2\,520$.

17. 【解】 (1) 将 2 只红球看成 1 个整体, 内部有 $A_2^2 = 2$ (种) 排法;

将 2 只白球看成 1 个整体, 内部有 $A_2^2 = 2$ (种) 排法;

将 3 只黑球看成 1 个整体, 内部有 $A_3^3 = 6$ (种) 排法.

3 个整体全排列, 有 $A_3^3 = 6$ (种) 排法, 则排列的方法种数为 $2 \times 2 \times 6 \times 6 = 144$.

(2) 由题意知, 将 7 只球分成三堆, 球数分别为 1, 3, 3.

先从 7 只球中选 1 只作为一堆, 有 $C_7^1 = 7$ (种) 分法; 然后从剩余 6 只球中选 3 只作为一堆, 有 $C_6^3 = 20$ (种) 分法; 最后剩余 3 只自动成堆.

因为有两堆都是 3 只球, 分堆时会产生重复, 需除以 $A_2^2 = 2$, 所以有 $\frac{7 \times 20}{2} = 70$ (种) 分堆方法.

(3) 取 4 只球, 各种颜色都必须取到, 设红球取 x 只, 白球取 y 只, 黑球取 z 只, 则 $x+y+z=4, x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$.

令 $x'=x-1 \geq 0, y'=y-1 \geq 0, z'=z-1 \geq 0$, 则 $x'+y'+z'=1$,

该方程的非负整数解为 (1, 0, 0),

(0,1,0),(0,0,1)三种情况.

第一种情况:红 2 只,白 1 只,黑 1 只,有 $C_2^2 \times C_2^1 \times C_3^1 = 1 \times 2 \times 3 = 6$ (种)方法;

第二种情况:红 1 只,白 2 只,黑 1 只,有 $C_2^1 \times C_2^2 \times C_3^1 = 2 \times 1 \times 3 = 6$ (种)方法;

第三种情况:红 1 只,白 1 只,黑 2 只,有 $C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^2 = 2 \times 2 \times 3 = 12$ (种)方法.

综上,满足题意的总方法数为 $6+6+12=24$.

18. 【解】 (1) 已知 $(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, $(1-2x)^7$ 展开式的通项 $T_{r+1} = C_7^r \cdot 1^{7-r} \cdot (-2x)^r = (-2)^r C_7^r x^r$,

因为 $a_r = (-2)^r C_7^r$, 所以 $|a_r| = 2^r C_7^r$, 所以 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_7|$ 等价于 $(1+2x)^7$ 展开式中各项系数之和, 令 $x=1$, 得 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_7| = 3^7 = 2187$.

(2) 对 $(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, 两边同时求导得 $7 \cdot (1-2x)^6 \cdot (-2) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + 7a_7x^6$, 令 $x=1$, 得 $a_1 + 2a_2 + \cdots + 7a_7 = 7 \times (1-2)^6 \times (-2) = -14$.

(3) 设第 $r+1$ 项的系数的绝对值最大, 即 $|a_r| = 2^r C_7^r$ 最大,

所以 $\begin{cases} 2^r C_7^r \geq 2^{r-1} C_7^{r-1}, \\ 2^r C_7^r \geq 2^{r+1} C_7^{r+1}, \end{cases}$

$$\text{即} \begin{cases} 2^r \cdot \frac{7!}{r! (7-r)!} \geq 2^{r-1} \cdot \frac{7!}{(r-1)! (8-r)!}, \\ 2^r \cdot \frac{7!}{r! (7-r)!} \geq 2^{r+1} \cdot \frac{7!}{(r+1)! (6-r)!}, \end{cases}$$

$$\text{化简得} \begin{cases} \frac{2}{r} \geq \frac{1}{8-r}, \\ \frac{1}{7-r} \geq \frac{2}{r+1}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} r \leq \frac{16}{3}, \\ r \geq \frac{13}{3}, \end{cases}$$

$$\text{即} \frac{13}{3} \leq r \leq \frac{16}{3},$$

因为 $r \in \mathbf{N}$, 所以 $r=5$, 所以 $T_6 = (-2)^5 C_7^5 x^5 = -672x^5$,

故该展开式中系数的绝对值最大的项为 $-672x^5$.

19. (1) 【解】 $(C_2^0)^2 + (C_2^1)^2 + (C_2^2)^2 = 1 + 4 + 1 = 6 = C_4^2$, $(C_3^0)^2 + (C_3^1)^2 + (C_3^2)^2 + (C_3^3)^2 = 1 + 9 + 9 + 1 = 20 = C_6^3$.

规律: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$, 证明如下: $(1+x)^n (1+x)^n$ 的展开式中, x^n 的系数为 $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \cdots + C_n^n C_n^0 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$, 同时 $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$, $(1+x)^{2n}$ 的展开式中 x^n 的

系数为 C_{2n}^n , 所以 $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

(2) 【证明】 $(1-x^2)^{2n}$ 的展开式中 x^{2n} 的系数为 $(-1)^n C_{2n}^n$, 又 $(1-x^2)^{2n} = (1-x)^{2n} (1+x)^{2n}$, $(1-x)^{2n} (1+x)^{2n}$ 的展开式中 x^{2n} 的系数为 $C_{2n}^0 C_{2n}^{2n} - C_{2n}^1 C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^2 C_{2n}^{2n-2} - \cdots + C_{2n}^{2n} C_{2n}^0 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2$,

所以 $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$.

(3) 【证明】由 (1) 可知 $(C_{2n}^0)^2 + (C_{2n}^1)^2 + \cdots + (C_{2n}^{2n})^2 = C_{4n}^{2n}$,

由 (2) 可知 $(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 - (C_{2n}^3)^2 + \cdots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n$,

两式相减可得 $2(C_{2n}^1)^2 + 2(C_{2n}^3)^2 + 2(C_{2n}^5)^2 + \cdots + 2(C_{2n}^{2n-1})^2 = C_{4n}^{2n} - (-1)^n C_{2n}^n$,

即 $\sum_{k=1}^n (C_{2n}^{2k-1})^2 = \frac{1}{2} [C_{4n}^{2n} + (-1)^{n-1} C_{2n}^n]$.

名师点拨 本题考查二项式定理、组合数公式的综合应用, 证明的关键是观察组合数平方和的结构特点构造二项式, 利用二项展开式中某项的系数相等得出题中需证的结论.

第六章高考强化

刷真题

1. C 【解析】 甲、乙两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有 $C_6^1 C_5^1 C_4^1 = 120$ (种), 故选 C.

2. B 【解析】 先从 5 名志愿者中选出 1 名志愿者参加星期六、星期日两天的公益活动, 再从剩下的 4 名志愿者中选出 2 名志愿者分别参加星期六、星期日的公益活动, 共有 $C_5^1 A_4^2 = 60$ (种) 不同的安排方式, 故选 B.

3. C 【解析】 先把除甲、乙、丙、丁外的其余 4 人分成人数分别为 1, 3 的两组, 有 $C_4^1 \cdot C_3^3$ 种分法, 再把丙、丁各放入一组, 共有 2 种放法, 然后把甲、乙放到 2 人组内, 只有 1 种放法, 再对应不同组别有 A_2^2 种方法, 所以共有 $C_4^1 \cdot C_3^3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_2^2 = 16$ (种) 方法, 故选 C.

链接教材 本题是教材第 27 页 14 题的同类题, 考查不同元素的分组分配问题. 因为没有指定谁在 A 组谁在 B 组, 所以此题最后要注意乘组数的全排列.

4. $\frac{1}{2}$ 【解析】 列举法: 假设乙固定按照 2, 4, 6, 8 的顺序, 则甲所有的可能如表所示.

1 3 5 7√	5 1 3 7√
1 3 7 5√	5 1 7 3
1 5 3 7√	5 3 1 7√
1 5 7 3	5 3 7 1
1 7 3 5√	5 7 1 3
1 7 5 3√	5 7 3 1
3 1 5 7√	7 1 3 5√
3 1 7 5	7 1 5 3√
3 5 1 7	7 3 1 5√
3 5 7 1	7 3 5 1√
3 7 1 5	7 5 1 3
3 7 5 1	7 5 3 1

从中找均小于 2, 4, 6, 8 与有 3 个数字分别小于 2, 4, 6, 8 的情况, 此时甲得 0 分或 1 分, 符合上述情况的有表中打√的 12 种情况.

那么甲的总得分不小于 2 分也有 12 种情况, 由古典概型概率公式得所求

点悟: 固定乙的顺序, 将甲的情况排列出来, 去挑选, 也可以从中判断甲有 2 个及以下的数字超过乙的. 如果改变乙的顺序, 其情况是类似的.

概率为 $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

多种解法 不妨设甲四轮比赛中所选卡片顺序固定, 即四轮比赛所选卡片依次为 1, 3, 5, 7, 此时乙有 $A_4^4 = 24$ (种) 选法. 甲可能得 0, 1, 2, 3 分, 但不可能得 4 分.

当甲得 2 分时, 若甲第二、三轮的数字大, 则有 1 种选法;

若甲第二、四轮的数字大, 则有 $A_2^2 + 1 = 3$ (种) 选法;

若甲第三、四轮的数字大, 则有 $A_2^2 A_2^2 + 1 + A_2^2 = 7$ (种) 选法,

共有 $1+3+7=11$ (种) 选法.

当甲得 3 分时, 甲第一轮的数字小, 其他三轮的数字大, 有 1 种选法.

故甲的总得分不小于 2 的概率 $P = \frac{11+1}{24} = \frac{1}{2}$.

5. $\frac{7}{15}$ 【解析】记取出的三个球上的数字按先后顺序分别为 a, b, c , 则共有 $A_6^3 = 120$ (种) 可能. 由题知, $|m-n| = \left| \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3} \right| = \left| \frac{a+b-2c}{6} \right| \leq 0.5$, 即 $|a+b-2c| \leq 3$, 所以 $2c-3 \leq a+b \leq 2c+3$, 其中 (a, b) 的不同取法共有 $A_6^2 = 30$ (种), 对应的 $a+b$ 的取值如表所示. 根据对称性知, $c=1$ 或 6 时, 均有 2 种可能;

点悟: $c=1$ 时, $a=2, b=3$ 或 $a=3, b=2$; $c=6$ 时, $a=4, b=5$ 或 $a=5, b=4$

$c=2$ 或 5 时, 均有 10 种可能;

点悟: $c=2$ 时, (a, b) 的值可为 $(1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (3, 4), (4, 3)$, 共 10 种情况, 同理可分析 $c=5$ 的情况

$c=3$ 或 4 时, 均有 16 种可能,

点悟: $c=3$ 时, (a, b) 的值可为 $(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 5), (5, 4)$, 共 16 种情况, 同理可分析 $c=4$ 时的情况

故满足条件的共有 $2 \times 2 + 2 \times 10 + 2 \times 16 =$

56 (种) 可能, 故所求概率 $P = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

$a+b$ 的取值表

b	a					
	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2	3		5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5	6	7		9	10
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9	10	11	

6. A 【解析】由 $(a-\sqrt{x})^7 = (a-x^{\frac{1}{2}})^7$, 可得二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r \cdot a^{7-r} \cdot (-x^{\frac{1}{2}})^r = (-1)^r \cdot C_7^r \cdot a^{7-r} x^{\frac{r}{2}}$, $r=0, 1, 2, \dots, 7$, 令 $\frac{r}{2} = 2$, 得 $r=4$, 则展开式中 x^2 的系数为 $(-1)^4 \cdot C_7^4 \cdot a^{7-4} = 35a^3 = 280$, 解得 $a=2$, 故选 A.

名师点拨 二项式 $(a-\sqrt{x})^7$ 中的后一项是 $-\sqrt{x}$, 注意展开式的通项必须含有 $(-1)^r$, 这里容易忽略负号直接计算, 导致系数符号出错; 注意通项是 T_{r+1} , 不要把 r 当成项的序号, 导致解方程时指数等式列错.

7. 8 【解析】 $(x+2y)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r x^{4-r} (2y)^r = 2^r C_4^r x^{4-r} y^r$, $r=0, 1, 2, 3, 4$, 令 $r=1$, 则 $T_2 = 2^1 C_4^1 x^3 y = 8x^3 y$, 故 $x^3 y$ 的系数为 8.

8. 5 【解析】二项式 $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} x^k$. 由 $\begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} > C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}, \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} > C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}, \end{cases}$ 解得 $\frac{29}{4} < k < \frac{33}{4}$. 又 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k=8$.

所以所求系数的最大值为 $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$.

多种解法 展开式中系数最大的项

一定在下面的 5 项中: $C_{10}^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 x^5$, $C_{10}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^4 x^6$, $C_{10}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 x^7$, $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 x^8$, $C_{10}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^1 x^9$, 计算可得, 所求系数的最大值为 $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$.

9. 20 【解析】 $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r \left(\frac{x^2}{3}\right)^{6-r} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^r = C_6^r 3^{2-6r} x^{12-4r}$, 令 $12-4r=0$, 得 $r=3$, 故常数项为 $C_6^3 \times 3^0 = 20$.

10. 15 【解析】 $(1-2x)^4 = a_0 + a_1 \cdot (-2x) + a_2 \cdot (-2x)^2 + a_3 \cdot (-2x)^3 + a_4 \cdot (-2x)^4$, 结合 $(1-2x)^4$ 的展开式可知 $a_0 = C_4^0 = 1$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$.

点悟: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2^4 - 1 = 15$

多种解法 (赋值法) 令 $x=0$, 可得

$a_0 = 1$;

令 $x = -\frac{1}{2}$, 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$

$\left[1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^4 = 16$,

故 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16 - a_0 = 15$.

刷原创

1. D 【解析】根据题意, 含 xy^3 的项为 $C_5^1 x C_4^3 (2y)^3 (-3) = -480xy^3$, 所以 xy^3 的系数是 -480 . 故选 D.

2. C 【解析】先将“福”字灯、“寿”字灯排好, 排列数为 $\frac{A_5^5}{A_2^2 A_3^3} = 10$, 形成 6 个空隙, 选 2 个空隙各放 1 个“禄”字灯, 有 $C_6^2 = 15$ 种方法, 则所有“禄”字灯不相邻的方法数为 $10 \times 15 = 150$.

当 3 个“福”字灯全相邻时, 先排“福”字灯、“寿”字灯, 一共有 $\frac{A_3^3}{A_2^2} = 3$ 种方法, 形

成了 4 个空隙, 选 2 个空隙各放 1 个“禄”字灯, 有 $C_4^2 = 6$ 种方法, 此时所有“禄”字灯不相邻的方法数为 $3 \times 6 = 18$.

所以不同的悬挂顺序的种数为 $150 - 18 = 132$. 故选 C.

3. 168 【解析】由题意知, 至少存在两个 $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ 使 $a_k = b_k$ 的矩阵分为两类.

第一类为有两列数满足 $a_k = b_k$, 将矩阵中的数排好, 则分为 3 步: (1) 先排第一行的四个数, 有 A_4^4 种方法; (2) 选择第二行中的两列与第一行中对应列的数相等, 有 C_4^2 种方法; (3) 第二行的余下两列上的数的排法只有 1 种, 则由分步乘法计数原理得共有 $A_4^4 C_4^2 \cdot 1 = 144$ (个) 符合要求的矩阵.

第二类为有三列数满足 $a_k = b_k$, 则矩阵中的四列数都满足 $a_k = b_k$, 有 $A_4^4 = 24$ (个) 符合要求的矩阵.

综上, 由分类加法计数原理得符合要求的矩阵共有 $144 + 24 = 168$ (个).

4. 60 【解析】由正六边形的性质可知, $\overrightarrow{OA_i} (i=1, 2, \dots, 6)$ 的模都相等且为正六边形的边长.

(1) 若 $\langle a, b \rangle = 0^\circ$, 则不存在满足题意的有序向量组;

(2) 若 $\langle a, b \rangle = 60^\circ$, 则 a 有 6 种取法, b 有 2 种取法, c 有 2 种取法, 则有序向

量组 (a, b, c) 共有 $6 \times 2 \times 2 = 24$ 个;

(3) 若 $\langle a, b \rangle = 120^\circ$, 则不存在 c 与 $a-b$ 共线, 即此时不存在满足题意的有序向量组;

(4) 若 $\langle a, b \rangle = 180^\circ$, 则 $a+b=0$, a, b 的取法有 6 种, c 有 6 种取法, 则有序向量组 (a, b, c) 共有 $6 \times 6 = 36$ 个.

综上, 由分类加法计数原理知, 有序向量组 (a, b, c) 共有 $24 + 36 = 60$ 个.